ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ЧАСТЬ II

ГРИБОВ
ВИТАЛИЙ АРКАДЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ФИЛИППОВУ ЕКАТЕРИНУ АЛЕКСАНДРОВНУ

Содержание

Лекция 1

§1. Квазитермодинамическая теория флуктуаций в изолированной системе

1. Адиабатически изолированная система «помещена» в двойные стенки (см. рис.1). В роли внешних параметров набор фиксированных величин: E – внутренняя энергия, V – объем, N – число частиц.

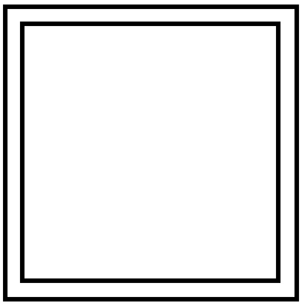

Рис.1 Изображение изолированной системы

В равновесии, которое постулировано нулевым началом термодинамики, любой внутренний параметр можно посчитать, если мы знаем значения внешних параметров и модель, которая описывает систему.

Флуктуации – это самопроизвольное отклонение значений внутренних параметров от равновесных значений.

В случае, когда система адиабатически изолирована, в равновесии потенциалом, который описывает эту систему, служит энтропия.

2. Для равновесной энтропии $S_{\text{равн}}$ был построен набор действий, которые приводили к ответу (чему равна энтропия). В термодинамике – по системе уравнений первого порядка, в стат.физике – считая статистический вес.

В неравновесной же ситуации приходится вводить некие гипотезы. Мы будем использовать несколько гипотез подряд. Этот путь начинается с того, что мы считаем возможным разбить систему на равновесные части. Система в целом не равновесна, но её можно представить, как объединение нескольких равновесных частей:

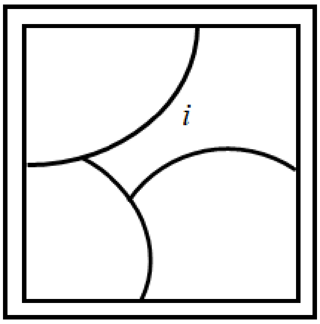

Рис.2 Изображение изолированной неравновесной системы, разбитой на равновесные части

Далее следующая гипотеза: «Как построить неравновесную энтропию, зная описание каждой равновесной части?» Раз мы знаем описание каждой части, то мы знаем её энтропию S_i.

Гипотеза состоит в следующем: $S_{\text{неравн}} \equiv S' = \sum_i S_i$. Какой ценой мы платим за то, что появляется эта схема вычислений?

1) **Слабая неравновесность в целом.**

Записывая энтропию, как сумму, мы заявляем о её аддитивности. Эта аддитивность может быть оправдана, когда система не слишком далеко от равновесия. Разбив систему на части, мы локализовали частицы около границ, отделяющих одну часть от другой. Тогда ни о какой аддитивности говорить нельзя. Т.е., система слабо не равновесна («пришла» к состоянию, близкому к равновесному), значит, объемные эффекты доминируют над поверхностными.

2) Мы решили, что для каждой части системы строим выражение для энтропии. Значит, каждая часть – это термодинамическая подсистема. Тогда каждая подсистема достаточно велика. Обозначим её размеры Δx_i.Внутри системы есть, как минимум, 2 числа размерности длины: среднее расстояние между соседними частицами $\bar{r}$ и длина свободного пробега $\lambda_{\text{св.пр.}}$. Пока частица не прошла расстояние, равное длине свободного пробега, она «не знает» о существовании соседних частиц (нет взаимодействия с ними). Δx_i должно быть больше любого из двух чисел ($\bar{r}, \lambda_{\text{св.пр.}}$), причем $\Delta x_i \gg \bar{r}$ ($N_i \gg 1$). Если при этом всем система термодинамическая, значит, в ней должны быть взаимодействия на расстояниях порядка длины свободного пробега $\lambda_{\text{св.пр.}}$, и тогда $\Delta x_i \gg \lambda_{\text{св.пр.}}$.

3) Если мы заявляем, что каждая подсистема уже равновесна, значит, было достаточно времени, чтобы она к этому равновесию пришла. Значит, масштаб, на котором мы можем обсуждать изменение во времени, т.е. тот интервал Δt, который мы ощущаем в нашем описании, должен быть существенно больше, чем время установления равновесия в каждой подсистеме: $\Delta t \gg \tau_{\text{лок}} \sim \tau_{\text{св.пробега}}$.

4) На рис.2 система разделена «географически». На самом деле, разбиение системы может происходить совсем иначе. Пример: Дебаевский кристалл. Если предположить, что каждый узел кристаллической решетки этого кристалла обладает магнитным моментом и все это находится находится во внешнем магнитном поле, то мы получаем систему магнитных моментов (систему спинов, из-за которых есть эти магнитные моменты), и эта система – это те же узлы решетки, которые участвуют в механических колебаниях (акустических волнах). Т.о., узлы решетки образуют одну подсистему, в которой наблюдаются механические колебания, распространяемые в пространстве, и другую подсистему – систему спинов, ассоциированных с ними магнитных моментов (некая магнитная система в целом). Существуют ситуации, когда установление равновесия отдельно в механической системе и отдельно в системе спинов происходит быстро, а между подсистемами установление равновесия идет медленно. Именно в этих ситуациях наблюдаются отрицательные температуры: поместили систему во внешнее магнитное поле, она пришла к равновесию, переключили рубильник – магнитное поле сменило направление на противоположное; в результате магнитная система должна переходить в равновесие снова, потому что она «сидит» при отрицательной температуре с инверсной заселенностью. Последующее выравнивание температур занимает довольно большое время. В целом, система обладает двумя температурами, и разбиение вовсе не географическое: каждый узел решетки участвует в обеих подсистемах.

3. **Вероятность неравновесного состояния**.

Начнем с того, что мы знаем для равновесного случая:

$$\Gamma = e^{S},$$

Γ – статистический вес (число микроскопических состояний, реализующих заданное макроскопическое),

S – энтропия равновесной системы.

Теперь вернемся к неравновесному состоянию.

$$\Gamma' = e^{S'},$$

S' – энтропия равновесной системы.

$$S' = \sum_i S_i$$

Вероятность неравновесного состояния пропорциональна числу способов реализовать это состояние:

$$w \sim \frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{e^{S'}}{e^{S}} = e^{\Delta S}, \text{ где}$$

$$\Delta S = (S' - S) \text{ при } E, V, N - const < 0$$

$w \sim e^{\Delta S}$ – принцип Больцмана-Планка-Эйнштейна

§2. Зависимость квазитермодинамической вероятности флуктуации от величины флуктуации

Распределение Гаусса

1. Пусть x – непрерывная случайная величина, заданная на некотором отрезке (см. рис.3). Выберем на этом отрезке короткий интервал (бесконечно малый) dx.

Возникает вопрос: «Как сформулировать вероятность того, что значение величины x попадает именно на этот интервал?» Если этот интервал бесконечно малый, то постулат утверждает, что результат пропорционален длине этого интервала dx. Если вдобавок учесть, что вероятность попадания значения x в разные места на этом отрезке может быть разной, то вероятность должна зависеть от того, где лежит этот интервал. Т.е., если вероятность пропорциональна dx, то коэффициент пропорциональности имеет право зависеть от x:

$w(x)dx$ – вероятность.

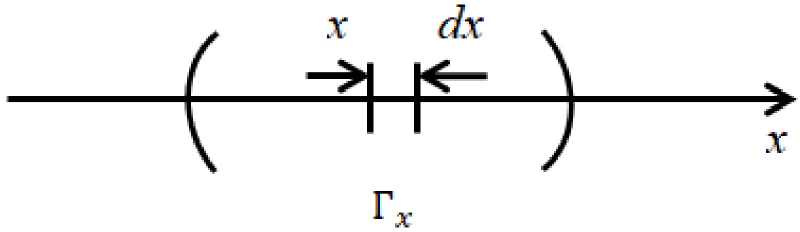

Рис.3 Изображение заданной случайной величины на отрезке

В соответствии с аксиомами теории вероятности, мы должны задать нормировку этого распределения, т.е.

$\int_{(\Gamma_x)} w(x)dx = 1$ – момент распределения $w(x)$ нулевого порядка,

$\int_{(\Gamma_x)} xw(x)dx = \bar{x}$ – момент первого порядка для распределения $w(x)$,

$\int_{(\Gamma_x)} x^n w(x)dx = \overline{x^n}$ – момент n-го порядка.

$\overline{(x-\bar{x})^n}$ –дисперсия n-го порядка

Чаще всего встречаются дисперсии второго порядка $n = 2$: $D_x = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2} - 2\overline{(x \cdot \bar{x})} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

2. Флуктуации описываются величиной x: в равновесии $x_{\text{равн}} = 0$.

Тем самым, $S_{\text{неравн}} = S(x)$.

Разложим в ряд Тейлора с центром в точке $x = 0$. Тогда $S(x) = S(0) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)_{x=0} \cdot x^2 + \cdots$

$$\Delta S = S(x) - S(0) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)_{x=0} \cdot x^2 + \cdots < 0.$$

Ради реализации последнего неравенства выдвигаются 2 условия: необходимое и достаточное

$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ – необходимо,

$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\lambda < 0$ – достаточно (для того, чтобы в равновесии энтропия достигала максимума $S_{\text{равн}} = \max S(x)$).

Получаем $\Delta S = -\frac{1}{2}\lambda x^2$.

Как выглядит вероятность теперь, когда x – непрерывная величина?

$$w(x)dx \sim e^{\Delta S}dx = e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}dx$$

Нам нужно выяснить, что представляет собой Γ_x –? Чтобы получить Гауссово распределение, надо заявить, что x приобретает любые вещественные значения.

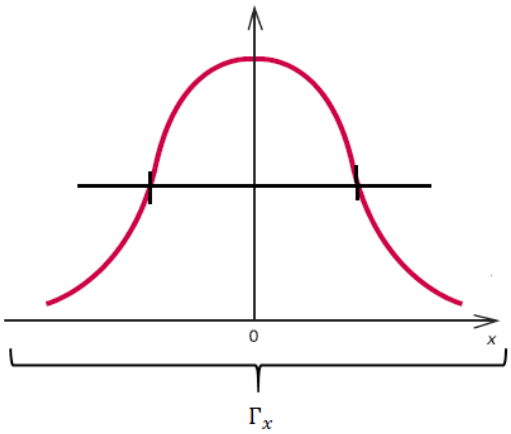

Рис.4 Распределение Гаусса

Γ_x: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Нормировка: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}dx = 1.$

Следовательно, $C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$

Тогда $w(x)dx = \frac{1}{C_1}e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}dx$ – распределение Гаусса.

Свойства распределения Гаусса (центрированного распределения).

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x) dx = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = 0$$

$$D_x = \overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx} =$$

$$= \frac{1}{C_1} \frac{\partial C_1}{\partial\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = -2 \frac{\partial ln C_1}{\partial \lambda} = -2 \frac{\partial}{\partial \lambda} ln \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}$$

$$w(x)dx = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} e^{-\frac{x^2}{2D_x}} dx$$

Теперь посчитаем нечетный момент распределения Гаусса.

$$\overline{x^{2n+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \frac{1}{C_1} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = 0, n \geq 0$$

$$\overline{x^{2n}} = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx} = \frac{1}{C_1} \frac{\partial^n}{\partial\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^n} C_1 = (-2)^n \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} =$$

$$= (-2)^n \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) = (-2)^n \lambda^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}-n} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{x^{2n}} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n (2n-1)!! = (D_x)^n (2n-1)!!$$

Замечание

Пусть величина x описывается распределением $w(x)dx$. Введем функцию $\varphi(x)$. Посмотрим дисперсию 2-го порядка для этой функции.

$$\Delta\varphi = \varphi(x) - \overline{\varphi(x)}$$

$$D_\varphi = \overline{(\Delta\varphi)^2} = \overline{(\varphi(x) - \overline{\varphi(x)})^2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi(x) - \varphi(0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} \cdot x$$

$$\overline{(\Delta\varphi)^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0}^2 \cdot \overline{x^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0}^2 D_x$$

§3. Квазитермодинамическая теория флуктуаций в неизолированной термодинамической системе

1.

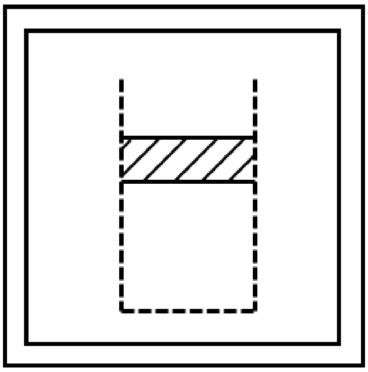

Рис.5 Адиабатически изолированные система+термостат

Для этой системы внешние параметры: θ – температура, p – давление, μ – химиечский потенциал.

2. **Система+термостат**

Внутренняя энергия объединения: $E_0 = E + E_т = const$, где E – энергия в системе, $E_т$ – энергия в термостате.

Число частиц в объединении: $N_0 = N + N_т = const$.

Объем: $V_0 = V + V_т = const$.

Энтропия: $S_0 = S + S_т$.

Если термостат и система находятся в равновесии, то в них одинаковая температура, одинаковое давление, одинаковый хим.потенциал. Температура – это равновесие термостата с системой по теплообмену, давление – равновесие по совершению механической работы, химический потенциал – равновесие по обмену частицами. Т.о.,
$\begin{cases} \theta = \theta_т \\ p = p_т. \\ \mu = \mu_т \end{cases}$

Как соотносятся флуктуации аддитивных величин в термостате и системе?

$$\begin{cases} \Delta E = -\Delta E_т \\ \Delta N = -\Delta N_т \\ \Delta V = -\Delta V_т \end{cases}$$

Чтобы термостат сыграл свою роль, нужно, чтобы он был большим по сравнению с системой. Поэтому возникают неравенства:

$$|\Delta E_т| \ll E_т,$$

$$|\Delta N_{\text{т}}| \ll N_{\text{т}},$$

$$|\Delta V_{\text{т}}| \ll V_{\text{т}}.$$

3. $\Delta S_0 = \Delta S + \Delta S_{\text{т}}$.

Для объединения термостата и системы можно использовать принцип Больцмана-Планка-Эйнштейна, потому что это в целом изолированная система.

Вероятность флуктуации $w_\Delta \sim e^{\Delta S_0} = e^{\Delta S + \Delta S_{\text{т}}} = e^{\Delta S} \cdot e^{\Delta S_{\text{т}}}$.

Лекция 2

(Продолжение §3, Лекция 1)

1. Если говорить о флуктуациях каких-либо аддитивных величин в термостате, например, $|\Delta N_\text{т}|$, по модулю эта величина совпадает с флуктуацией числа частиц в системе (общее число частиц фиксировано): $|\Delta N_\text{т}| = |\Delta N| \lesseqgtr N \ll N_\text{т}$, где N – число частиц в системе, $N_\text{т}$ – число частиц в термостате. Следовательно, флуктуации числа частиц в термостате относительно малы. По той же самой причине малы флуктуации объема термостата: $|\Delta V_\text{т}| \ll V_\text{т}$. И по этой же причине флуктуации внутренней энергии в термостате много меньше, чем сама внутренняя энергия в термостате: $|\Delta E_\text{т}| \ll E_\text{т}$. Благодаря этим трём сильным неравенствам, можно флуктуацию энтропии термостата записать, как функцию флуктуирующих параметров, от которых эта энтропия зависит:

$$\Delta S_\text{т} = \left(\frac{\partial S_\text{т}}{\partial E_\text{т}}\right)\Delta E_\text{т} + \left(\frac{\partial S_\text{т}}{\partial V_\text{т}}\right)\Delta V_\text{т} + \left(\frac{\partial S_\text{т}}{\partial N_\text{т}}\right)\Delta N_\text{т}$$

Дифференциал энтропии:

$$dS = \frac{1}{\theta}dE + \frac{p}{\theta}dV - \frac{\mu}{\theta}dN$$

Значит, производные первого порядка, которые упомянуты в линейном приближении для $\Delta S_\text{т}$, известные величины.

Поэтому, флуктуация энтропии в термостате:

$$\Delta S_\text{т} = \frac{1}{\theta_\text{т}}\Delta E_\text{т} + \frac{p_\text{т}}{\theta_\text{т}}\Delta V_\text{т} - \frac{\mu_\text{т}}{\theta_\text{т}}\Delta N_\text{т} = -\frac{1}{\theta}\Delta E - \frac{p}{\theta}\Delta V + \frac{\mu}{\theta}\Delta N$$

Тогда вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{\Delta S - \frac{1}{\theta}(\Delta E + p\Delta V - \mu\Delta N)}$$

$\boxed{w \sim e^{\frac{1}{\theta}(\theta\Delta S - \Delta E - p\Delta V + \mu\Delta N)}}$ – вероятность флуктуации в неизолированной системе.

Полученный выше результат базируется на принципе Больцмана-Планка-Эйнштейна. Кроме того, мы сделали еще одно приближение: флуктуацию энтропии термостата ограничили линейным приближением.

2. Примеры.

1) Рассмотрим систему, которая задана условием $(V, N, \theta) - const.$

Тогда вероятность флуктуации:

$$w \sim \left[e^{\frac{1}{\theta}(\theta\Delta S - \Delta E)}\right]_{V,N,\theta - const} = \left[e^{-\frac{1}{\theta}\Delta(E - \theta S)}\right]_{V,N,\theta - const}$$

$$w \sim e^{-\frac{\Delta F}{\theta}}, \text{ где } F \text{ – свободная энергия.}$$

$\Delta F = (F' - F_{\text{равн}})_{V,N,\theta-const} > 0$, где F'– неравновесная свободная энергия.

Судя по формуле выше для вероятности флуктуации, вероятность равновесного состояния больше, чем вероятность любого неравновесного.

2) Выберем в роли внешних параметров $(\theta, p, N) - const$.

Тогда вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{\frac{1}{\theta}(\theta\Delta S - \Delta E - p\Delta V)} = e^{-\frac{1}{\theta}\Delta(E-\theta S+pV)} = \left(e^{-\frac{\Delta G}{\theta}}\right)_{(\theta,p,N)-const}$$, где G – потенциал Гиббса.

3) Система с «воображаемыми» стенками, $(\theta, V, \mu) - const$.

Вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{\frac{1}{\theta}(\theta\Delta S - \Delta E + \mu\Delta N)} = e^{-\frac{1}{\theta}\Delta(E-\theta S-\mu N)} = \left(e^{-\frac{\Delta\Omega}{\theta}}\right)_{(\theta,V,\mu)-const}$$, где Ω – термодинамический потенциал.

Во всех приведенных выше примерах мы позволили системе обмениваться с внешним миром всеми аддитивными величинами. Вообще говоря, так делать нельзя. Мы пошли кратчайшим путем. Пусть у нас есть «дырявый» цилиндр, поршень, под которым наша система (см. рис.6). Разделим эту систему на две части. Получаем две подсистемы. θ, p, μ одинаковы слева и справа. Поэтому, задав эти три числа, мы не знаем, какую систему описываем. Но три позиции уже использованы, как теперь вводить еще один аддитивный параметр? Самое главное состоит в том, что здесь нет трех «занятых» позиций (трех независимых переменных). Если вспомнить, что потенциал Гиббса $G = \mu N$ из соображения аддитивности, записав дифференциал G, получим дифференциал химического потенциала $d\mu = -Sd\theta + Vdp$. В равновесии хим.потенциал есть функция от температуры и давления $\mu = \mu(\theta, p)$, значит, задача температуру и давление, μ мы уже задали. Следовательно, эта величина не может фигурировать, как третий независимый параметр.

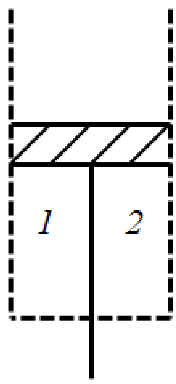

Рис.6 Система, разделенная на две подсистемы, под поршнем

§4. Вероятность малых флуктуаций в неизолированной системе

1. Вернемся к формуле для вероятности флуктуации

$$w \sim e^{\frac{1}{\theta}(\theta\Delta S - \Delta E - p\Delta V + \mu\Delta N)}$$

Рассмотрим внутреннюю энергию E более аккуратно, т.е. не будем ограничивать её флуктуацию первым приближением:

$$E = E(S, V, N)$$

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N-const} \cdot \Delta S + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N-const} \cdot \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V-const} \cdot \Delta N$$

Вспомним, что $\frac{\partial E}{\partial S} = \theta, \frac{\partial E}{\partial V} = -p, \frac{\partial E}{\partial N} = \mu$. Если подставить этот результат для ΔE в исходную формулу для вероятности флуктуации, то мы получим нулевую степень. Поэтому в разложении ΔE мы переходим к следующему порядку.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N-const} \cdot \Delta S + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N-const} \cdot \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V-const} \cdot \Delta N \\ &+ \frac{1}{2!}\left\{\left[\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\Delta S + \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S}\Delta V + \frac{\partial^2 E}{\partial N \partial S}\Delta N\right]\Delta S \right. \\ &+ \left[\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}\Delta S + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\Delta V + \frac{\partial^2 E}{\partial N \partial V}\Delta N\right]\Delta V \\ &+ \left.\left[\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial N}\Delta S + \frac{\partial^2 E}{\partial N^2}\Delta N + \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial N}\Delta V\right]\Delta N\right\} + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N-const} \cdot \Delta S + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N-const} \cdot \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V-const} \cdot \Delta N \\ &+ \frac{1}{2!}\{\Delta\theta\Delta S - \Delta p \Delta V + \Delta\mu\Delta N\} + \cdots\end{aligned}$$

Таким образом,

$w \sim e^{-\frac{1}{2\theta}(\Delta\theta\Delta S - \Delta p\Delta V + \Delta\mu\Delta N)}$ – вероятность малых флуктуаций в неизолированной системе

2. **Примеры**

1) Пусть $V, N = const.$

Тогда вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{-\frac{\Delta\theta\Delta S}{2\theta}}$$

Полагая, что $S = S(\theta, V, N)$,

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{V,N} \Delta\theta + \cdots = \frac{C_{vN}}{\theta}\Delta\theta + \cdots$$

Получаем:

$$w \sim e^{-\frac{C_{vN}}{2\theta^2}(\Delta\theta)^2}$$

Перед нами Гауссово распределение, его дисперсия:

$$\overline{(\Delta\theta)^2}_{V,N} = \frac{\theta^2}{C_{vN}} = \frac{\theta^2}{NC_v} \sim \frac{1}{N}$$

Оказывается, дисперсия интенсивной величины с ростом N стремится к нулю.

2) Зафиксируем давление и число частиц: $p, N - const$.

Вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{-\frac{\Delta\theta\Delta S}{2\theta}}$$

Построим ΔS:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_{p,N} \Delta\theta = \frac{C_{pN}}{\theta}\Delta\theta$$

Теперь подставим ΔS в формулу для вероятности флуктуации:

$$w \sim e^{-\frac{C_{pN}}{2\theta^2}(\Delta\theta)^2}$$

Получили снова распределение Гаусса. Тогда дисперсия температуры:

$$\overline{(\Delta\theta)^2}_{p,N} = \frac{\theta^2}{C_{pN}} = \frac{\theta^2}{NC_p} \sim \frac{1}{N}$$

$$\boxed{C_{pN} > C_{vN}}$$

3) Положим $\theta, N - const$.

Тогда вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{\frac{\Delta p\Delta V}{2\theta}}$$

Полагая, что $p = p(\theta, V, N)$,

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N} \Delta V + \cdots$$

Вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{\frac{1}{2\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^2}$$

Снова получили Гауссово распределение. Итак,

$$\overline{(\Delta V)^2}_{\theta,N} = \frac{-1}{\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N}} = \frac{\theta}{\left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\theta}} \sim N$$

v – удельный объем.

Восстановим вероятность флуктуации в исходном общем виде:

$$w \sim e^{\frac{1}{2\theta}(\Delta p \Delta V - \Delta\theta\Delta S - \Delta\mu\Delta N)}$$

Посмотрим на каждое из трех слагаемых в степени экспоненты: флуктуация каждой аддитивной величины умножается на флуктуацию интенсивной величины (например, $\Delta p\Delta V$).Обозначим аддитивную величину, как A, интенсивную – a. Тогда:

$$w \sim e^{\frac{1}{2\theta}\Delta a \Delta A}$$

Считая, что Δa – малое:

$$\Delta a = \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)\Delta A + \cdots$$

Подставляя этот результат в выражение для вероятности,

$$w \sim e^{\frac{1}{2\theta}\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)(\Delta A)^2}$$

Дисперсия:

$$\overline{(\Delta A)^2} = -\theta\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right) > 0 \sim N$$

$$\overline{(\Delta a)^2} = -\theta\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right) > 0 \sim N^{-1}$$

Относительная флуктуация:

$$\delta A = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta A)^2}}}{\bar{A}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\delta a = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta a)^2}}}{\bar{a}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Таким образом, дисперсия аддитивной величины – аддитивна, а относительная флуктуация и аддитивной, и интенсивной величины ведут себя одинаково.

3. Посмотрим, как ведет себя дисперсия концентрации частиц $\overline{(\Delta n)^2}$. Начнем с дисперсии объема.

$$\overline{(\Delta V)^2}_{\theta,N} = \frac{N\theta}{\left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta}$$

Поделим этот результат на N^2. Учтем: $\frac{V}{N} = v$. Получаем

$$\overline{(\Delta v)^2} = \frac{\theta}{N\left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta}$$

Удельный объем:

$$v = \frac{V}{N} = \frac{1}{n}$$

Тогда

$$\Delta v = -\frac{1}{n^2}\Delta n$$

$$\Delta n = -n^2 \Delta v$$

Значит,

$$\overline{(\Delta n)^2}_\theta = n^4 \overline{(\Delta v)^2} = \frac{n^4 \theta}{N\left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta}$$

4. **Флуктуации концентрации частиц в критической точке**

Вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{\frac{\Delta p \Delta V}{2\theta}}$$

Критическая точка – одно из равновесных состояний системы. Термическое уравнение состояния: $p = p(\theta, v)$.

Достаточное условие устойчивости системы:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta = 0$$

Вторая производная тоже должна быть равна нулю:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_\theta = 0$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} p = p(\theta, v) - \text{критическая точка} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_\theta = 0 \end{cases}$$

Чтобы термодинамическая система, в которой наблюдается критическая точка, была устойчива, придется заявить, что есть еще и третья производная, и она знакоопределенна:

$$\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_\theta < 0$$

Обозначим $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_\theta = -\varkappa$. Получаем:

$$\Delta p = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^3 = -\frac{1}{6}\frac{\varkappa}{N^3}(\Delta V)^3$$

Тогда вероятность флуктуации:

$$w \sim e^{-\frac{1}{12}\frac{\varkappa}{N^3\theta}(\Delta V)^4}$$

Если мы введем новые обозначения $\alpha = \frac{1}{12}\frac{\varkappa}{N^3\theta}, x = \Delta V$, получим:

$$\boxed{w(x)dx = \frac{1}{\tilde{C}}e^{-\alpha x^4}}$$

Лекция 3

Вернемся к формулам, полученным в Лекции 2:

вероятность флуктуации при фиксированном числе частиц и температуре

$$w \sim e^{\frac{\Delta p \Delta V}{2\theta}}$$

$$w(x)dx = \frac{1}{\tilde{C}} e^{-\alpha x^4}, \text{ где } \alpha = \frac{1}{12}\frac{\varkappa}{N^3\theta}, x = \Delta V, \left(-\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_\theta = \varkappa \ (*)$$

Установим, чему равна нормировочная константа $\tilde{C}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1 \ \Rightarrow \tilde{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^4} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^4} dx$$

Обозначим $\alpha x^4 = t$. Тогда $x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/4}$. Следовательно, $dx = \alpha^{-1/4}\frac{1}{4}t^{-3/4}dt.$ Получаем

$$\tilde{C} = \frac{1}{2\alpha^{1/4}}\int_0^{+\infty} t^{-3/4}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{2\alpha^{1/4}}$$

Найдем при таком распределении дисперсию объема:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\tilde{C}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4}dx = \frac{2\alpha^{1/4}}{\Gamma(\frac{1}{4})}\cdot 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4}dx = \frac{4\alpha^{\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}e^{-t}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{4\alpha^{\frac{1}{4}}}dt$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\cdot\Gamma(\frac{3}{4})$$

$$x = \Delta V \Rightarrow \overline{(\Delta V)^2} = \sqrt{\frac{12\theta N^3}{\left(-\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_\theta}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

Вероятность флуктуации в изолированной системе:

$$w \sim e^{\frac{1}{\theta}(\theta\Delta S - \Delta E - p\Delta V + \mu\Delta N)}$$

Если мы теперь зафиксируем температуру, давление и число частиц: $\theta, p, N - const,$ то это вероятность флуктуации «упростится»:

$w \sim e^{\frac{1}{\theta}(-\Delta(E-\theta S) - p\Delta V)} = e^{\frac{1}{\theta}(-\Delta F - p\Delta V)}$, где F – свободная энергия. Будем считать $F = F(\theta, V, N)$, тогда:

$$(\Delta F + p\Delta V)_{\theta,p,N-const} =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) + p\right)\Delta V + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial V^3}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^3$$
$$+ \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial V^4}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^4 + \cdots > 0$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\theta,N}$$

Мы хотим обсуждать критическую точку, но

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_{\theta,N} = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\theta,N} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial V^3}\right)_{\theta,N} = \left(-\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{\theta,N} = 0 \text{ – необходимое условие}$$

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial V^4}\right)_{\theta,N} = \left(-\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_{\theta,N} > 0 \text{ – достаточное условие}$$

Если мы теперь вернемся к выражению для вероятности, то получим:

$$w \sim e^{-\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{24}\left(-\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_{\theta,N}(\Delta V)^4} \quad (**)$$

Сравним с формулой (*). В (*) получен результат повторного разложения в ряд по степеням малых параметров. В формуле (**) же один шаг. Реальная ситуация описывается иначе (§5).

§5. Равновесные корреляционные функции и флуктуации плотности в классическом неидеальном газе

1. Мы придем к флуктуации плотности, начиная с флуктуации объема и числа частиц.

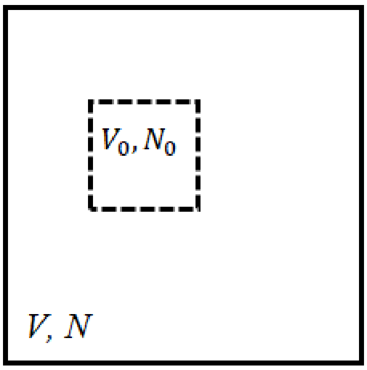

Рис.7 Изображение воображаемого объема внутри полного объема нашей системы

В полном объеме постоянное число частиц N; $V_0 - const, N_0$ может меняться.

Как мы будем считать N_0? Для этой цели рассмотрим среднее от аддитивной величины:

$$A_N = \sum_{i=1}^{N} A(\vec{r_i})$$

2. Чтобы заниматься усреднением, введем функцию распределения по координатам для всей системы:

$$D_N(q) = \frac{1}{QV^N} e^{-\frac{U(q)}{\theta}}\text{, где}$$

$$U(q) = \sum_{i=1}^{N} U(\vec{r_i}) + \sum \sum_{1 \le i \le j \le N} \Phi(|\vec{r_i} - \vec{r_j}|)$$

Конфигурационный интеграл: $Q \equiv \frac{1}{V^N} \int_{(V)} D_N(q) dq$; $dq = d^3r_1 \dots d^3r_N$ – произведение элементарных объемов в очередном трехмерном пространстве каждой очередной частицы.

Строим корреляционные функции:

$$F_1(\vec{r_1}) \equiv V \int_{(V)} D_N(q) d^3r_2 \dots d^3r_N$$

$$F_2(\vec{r_1}, \vec{r_2}) \equiv V^2 \int_{(V)} D_N(q) d^3r_3 \dots d^3r_N$$

$$\dots$$

3. Вычислим средние:

$$\overline{A_N} = \int_{(V)} \sum_{i=1}^{N} A(\vec{r_i}) D_N(q) dq$$

Заменим i на 1, а 1 на i. Тогда получим N одинаковых слагаемых:

$$\overline{A_N} = N \int_{(V)} A(\vec{r_1}) D_N(q) dq = \frac{N}{V} \int_{(V)} d\vec{r_1} A(\vec{r_1}) \cdot V \int_{(V)} D_N(q) d^3r_2 \dots d^3r_N =$$

$$= \frac{N}{V} \int_{(V)} d\vec{r_1} A(\vec{r_1}) \cdot F_1(\vec{r_1}) = \frac{1}{v} \int_{(V)} A(\vec{r_1}) \cdot F_1(\vec{r_1}) d^3r_1$$

Чтобы посчитать дисперсию $\overline{A_N}$, нужно сначала посчитать:

$$\overline{A_N^2} = \overline{\sum_{i=1}^{N} A(\vec{r_i}) \cdot \sum_{j=1}^{N} A(\vec{r_j})} = \overline{\sum_{i=1}^{N} A^2(\vec{r_i})} + \overline{\sum\sum_{i\neq j} A(\vec{r_i}) \cdot A(\vec{r_j})} =$$

$$= \int\limits_{(V)} \left(\sum_{i=1}^{N} A^2(\vec{r_i})\right) D_N(q)dq + 2\int\limits_{(V)} \sum\sum_{1\le i\le j\le N} A(\vec{r_i}) \cdot A(\vec{r_j})\, D_N(q)dq$$

В первой сумме заменим i на 1, а 1 на i. А во второй сумме поменяем i на 1, j на 2. В результате получим N одинаковых слагаемых в первой сумме и $\frac{N(N-1)}{2}$ – во второй:

$$\overline{A_N^2} = N \int\limits_{(V)} A^2(\vec{r_1})\, D_N(q)dq + N(N-1) \int\limits_{(V)} A(\vec{r_1})A(\vec{r_2})D_N(q)dq =$$

$$= \frac{N}{V} \int\limits_{(V)} d^3r_1 A^2(\vec{r_1}) \cdot V \int\limits_{(V)} D_N(q) d^3r_2 \dots d^3r_N$$

$$+ \frac{N(N-1)}{V^2} \int\limits_{(V)} d^3r_1 d^3r_2 A(\vec{r_1})A(\vec{r_2}) \cdot V^2 \int\limits_{(V)} D_N(q) d^3r_3 \dots d^3r_N =$$

$$= \frac{N}{V} \int\limits_{(V)} d^3r_1 A^2(\vec{r_1}) \cdot F_1(\vec{r_1}) + \frac{N(N-1)}{V^2} \int\limits_{(V)} d^3r_1 d^3r_2 A(\vec{r_1})A(\vec{r_2}) \cdot F_2(\vec{r_1},\vec{r_2})$$

В предельно-статистической процедуре $\frac{N}{V} = \frac{1}{v}$; $\frac{N(N-1)}{V^2} = \frac{1}{v^2}$.

Окончательно получаем:

$$\overline{A_N^2} = \frac{1}{v} \int\limits_{(V)} A^2(\vec{r_1}) \cdot F_1(\vec{r_1}) d^3r_1 + \frac{1}{v^2} \int\limits_{(V)} A(\vec{r_1})A(\vec{r_2}) \cdot F_2(\vec{r_1},\vec{r_2})\, d^3r_1 d^3r_2$$

Найдем число частиц N_0 в пробном объеме V_0 (см. рис.7):

$$N_0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta(\vec{r_i})$$

$$\Delta(\vec{r}) = \begin{cases} 1, \vec{r} \in V_0 \\ 0, \vec{r} \,\overline{\in}\, V_0 \end{cases}$$

Теперь найдем среднее число частиц $\overline{N_0}$:

$$\overline{N_0} = \frac{1}{v} \int\limits_{(V)} \Delta(\vec{r_1}) F_1(\vec{r_1}) d^3r_1$$

Сделаем следующее предположение: мы рассматриваем пространственно-однородную задачу:

$$F_1(\overrightarrow{r_1}) = 1$$

$$F_2(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = F_2(R)$$

$$\vec{R} \equiv \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$

Тогда:

$$\overline{N_0} = \frac{1}{v} \int\limits_{(V_0)} d^3 r_1 = \frac{V_0}{v}$$

$$\overline{N_0^2} = \frac{1}{v} \int\limits_{(V)} \Delta^2(\overrightarrow{r_1}) F_1(\overrightarrow{r_1}) d^3 r_1 + \frac{1}{v^2} \int\limits_{(V)} \Delta(\overrightarrow{r_1}) \Delta(\overrightarrow{r_2}) F_2(R) d^3 r_1 d^3 r_2 =$$

$$= \frac{V_0}{v} + \frac{1}{v^2} \int\limits_{(V_0)} F_2(R) d^3 R \cdot \int\limits_{(V_0)} \Delta(\overrightarrow{r_2}) d^3 r_2 = \frac{V_0}{v} + \frac{1}{v^2} \int\limits_{(V_0)} F_2(R) d^3 R \cdot V_0$$

Посчитаем дисперсию N_0:

$$\overline{(\Delta N_0)^2} = \overline{N_0^2} - (\overline{N_0})^2 = \frac{V_0}{v} + \frac{V_0}{v^2} \int\limits_{(V_0)} F_2(R) d^3 R - \frac{{V_0}^2}{v^2} = \frac{V_0}{v} \left\{ 1 + \frac{1}{v} \int\limits_{(V_0)} F_2(R) d^3 R - \frac{V_0}{v} \right\}$$

Перепишем $\frac{V_0}{v} = \frac{1}{v} \int_{V_0} d^3 R$. Тогда получим:

$$\overline{(\Delta N_0)^2} = \frac{V_0}{v} \left\{ 1 + \frac{1}{v} \int\limits_{(V_0)} [F_2(R) - 1] d^3 R \right\}$$

Концентрация или плотность числа частиц:

$$n = \frac{N_0}{V_0}, V_0 = const$$

$$\overline{(\Delta n)^2} = \frac{\overline{(\Delta N_0)^2}}{{V_0}^2} = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{1}{v} \left\{ 1 + \frac{1}{v} \int\limits_{(V_0)} [F_2(R) - 1] d^3 R \right\}$$

§6. Брауновское движение

Брауновское движение – это движение брауновских частиц.

1. **Брауновские частицы**

1) Брауновские частицы крупные (начиная с 1 мкм).

$$a \gtrapprox 10^{-6} \text{м}$$

2) Среда мелких частиц.

3) Частицы стабильны.

2. **Описание брауновских частиц**

Рассмотрим распределение брауновских частиц в пространстве. Почему не по скоростям? Потому что, если мы немного подождем, то установится равновесное распределение брауновских частиц по скоростям (распределение Максвелла). Значит, классическая система нерелятивистских частиц находится в термостате, который создан средой мелких частиц. Остается выяснить, как происходит распределение этих частиц в пространстве.

Из пункта 3) частицы стабильны. Поэтому, если говорить об их числе в выбранном нами объеме, то это число может меняться только по одной причине: частицы вышли из этого объема или вернулись в него. Т.е. изменение числа частиц внутри объема определяется поведением их на поверхности, отделяющей этот объем от остального мира. Все это сводится к уравнению непрерывности.

Введем функцию $\rho(\vec{r}, t)$ – концентрация.

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0, \text{ где}$$

j – плотность потока частиц.

$$\vec{j} = \overrightarrow{j_{\text{ГД}}} + \overrightarrow{j_{\text{дифф}}}, \text{ где}$$

$\overrightarrow{j_{\text{ГД}}}$ – гидродинамическая плотность потока, $\overrightarrow{j_{\text{дифф}}}$ – плотность диффузионного потока.

$$\overrightarrow{j_{\text{дифф}}} = -Dgrad\rho - \rho \cdot gradD = -grad(D\rho)$$

Оставим простую версию: $\overrightarrow{j_{\text{дифф}}} = -Dgrad\rho$.

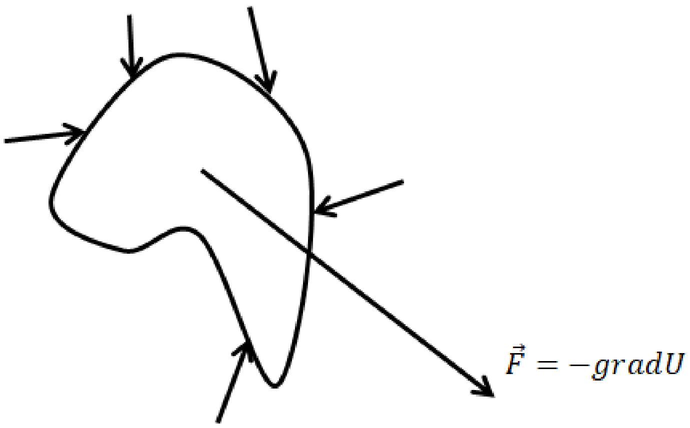

Рис.8 Крупная частица, на которую действуют внешние поля и мелкие частицы

Результирующая сил, действующих на частицу: $\overrightarrow{F_{\text{среды}}} = \overrightarrow{F_{\text{трения}}} + \overrightarrow{F_{\text{случайн.}}}$

Уравнение движения:

$$m\dot{\vec{v}} = -gradU - \gamma\vec{v} + \overrightarrow{F_{\text{случайн.}}}$$

Усредним этот результат по интервалу длительностью в одно столкновение $\Delta t \sim \tau_{\text{столкн.}}$, тогда $\overrightarrow{F_{\text{случайн.}}}$ даст 0:

$$m\dot{\vec{v}} = -gradU - \gamma\vec{v}$$

Установившееся течение (τ):

$$\overrightarrow{v_{\text{ГД}}} = -\frac{1}{\gamma}gradU = \frac{\overrightarrow{F_{\text{внешн.}}}}{\gamma}$$

$$\overrightarrow{J_{\text{ГД}}} = \rho\overrightarrow{v_{\text{ГД}}}$$

Тогда:

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left[-Dgrad\rho - \frac{\rho}{\gamma}gradU\right] = 0$ – уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка

Лекция 4

Вспомним уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка (Лекция 3):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left[-Dgrad\rho - \frac{\rho}{\gamma}gradU\right] = 0 \qquad (*)$$

Это уравнение линейно по ρ, поэтому можно нормировать ρ так, как нам удобно (например, на единицу).

В этом уравнение фигурирует коэффициент диффузии D и коэффициент пропорциональности между модулем силы трения в жидкости и скоростью движения частицы в жидкости γ. Диффузия и движения в вязкой среде – связанные процессы, поэтому попробуем связать эти коэффициенты.

Пусть $t \to \infty$. Тогда получим равновесное состояние этой системы. Следовательно, устанавливается распределение, которое не зависит от времени, значит, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Тогда:

$$-Dgrad\rho - \frac{\rho}{\gamma}gradU = 0$$

Разделим переменные, полагая, что D и γ – постоянные коэффициенты. Получим:

$$\frac{1}{\rho}grad\rho = -\frac{1}{\gamma D}gradU$$

Пусть $\gamma D = const$. Проинтегрируем это уравнение. В результате получим:

$$ln\rho = -\frac{U}{\gamma D} + lnC$$

Значит,

$$\rho = \rho(\vec{r}) = Ce^{-\frac{U}{\gamma D}}$$

Вспомним, что представляет собой наша система. Это крупные частицы (мы их можем видеть), расставленные достаточно редко, поэтому мы их объявили идеальным газом. Т.о., перед нами классический идеальный газ в равновесном состоянии. Значит, распределение, которое мы получили, должно представлять собой распределение Больцмана. Тогда с точностью до нормировки:

$$\rho = \rho(\vec{r}) = Ce^{-\frac{U}{\gamma D}} \sim e^{-\frac{U(\vec{r})}{\theta}}$$

Отождествим эти экспоненты, тогда:

$$\gamma D = \theta \ \Rightarrow D = \frac{\theta}{\gamma}$$

Результат вполне понятный. Чем выше температура, тем подвижнее частицы, и диффузия идет быстрее, значит, коэффициент диффузии становится больше. В то же время, чем больше сопротивление среды, тем диффузия идет медленнее.

3. **Частные случаи**

а) Одномерный случай

Рассматриваем всю числовую ось $-\infty \le x \le +\infty, t \ge 0$. Внешнее поле объявим отсутствующим: $gradU \equiv 0, D = const$.

Тогда уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Это уравнение параболического типа. Нужно задать два граничных условия и одно начальное. Зададим нормировочный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)dx = 1$$

ρ – плотность вероятности или функция распределения. Сюда «запакованы» оба граничных условия для функции ρ. Перед нами несобственный интеграл. Для того, чтобы он сходился, необходимо, чтобы подынтегральное выражение (функция ρ) на концах интервала интегрирования стремилась к нулю (первое граничное условие).

Из того, что на бесконечности $\rho = 0$, получается, что производная ρ по x тоже равняется нулю на бесконечности (второе граничное условие).

Начальное условие должно быть согласовано с граничным, поэтому $\rho(x,t)_{t=0} = \delta(x - x_0)$.

Т.о., вся задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)dx = 1 \\ \rho(x,t)_{t=0} = \delta(x - x_0) \end{cases}$$

Построим решение.

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

Решение в виде распределения Гаусса.

б) Трехмерный случай

$$\vec{r} \in R_3, t \geq 0$$

$$gradU - 0, D = const$$

В этом случае уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\Delta\rho$$

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}, t)dxdydz = 1$$

Условие сходимости этого интеграла: стремление ρ к нулю на границах. Из этого вытекает, что $grad\rho$ на границах стремится к нулю. Поэтому

$$\rho(\vec{r}, t = 0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

Получили систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = D\Delta\rho \\ \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}, t)dxdydz = 1 \\ \rho(\vec{r}, t = 0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \end{cases}$$

Её решение:

$$\rho(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{3/2} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r_0})^2}{4Dt}}$$

а) результаты

Посчитаем $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x, t)dx = x_0$$

$$\Delta x = x - \bar{x} = x - x_0$$

Дисперсия: $\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x - x_0)^2} = 2Dt \sim t^1$

Дисперсия нечетного порядка: $\overline{(\Delta x)^{2n+1}} = 0$

При $n \geq 1$: $\overline{(\Delta x)^{2n}} = (2n - 1)!! \cdot (2Dt)^n \sim t^n$

Теперь оценим скорость распространения примеси v:

$$v \sim \frac{\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}}{t} = \frac{\sqrt{2Dt}}{t} \sim t^{-1/2} \to \infty \text{ при } t \to 0$$

Получили, что примесь мгновенно распространяется на все трехмерное пространство. В чем же тут дело? Для этого нужно вспомнить, как мы выводили уравнение. Мы дважды усредняли по интервалу времени: сначала по продолжительности одного столкновения, затем по выжиданию того момента, когда мы войдем в режим установившейся скорости. Значит, объявлять, что $t \to 0$ нужно с осторожностью.

§7. Случайные (стохастические) процессы. Основные понятия.

1. $x(t)$ назовем **случайным процессом**, если при любом заданном t x является случайной величиной.

2. Задание $x(t)$

1) Строим вероятность того, что x в момент t_1 находится на отрезке $[x_1; x_1 + dx_1]$:

$W(x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1)$, x – непрерывная величина.

Если считать, что dx_1 – дифференциально малая величина, то вероятность пропорциональна длине интервала, а коэффициент пропорциональности зависит от того, где помещен этот интервал, и от параметра t_1.

$$W(x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1) = w_1(x_1, t_1)dx_1$$

Свойства w_1:

$$\int w_1(x_1, t_1)dx_1 = 1$$

2) Вероятность того, что происходят два события:

$$W\begin{cases} x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1 \\ x_2 \leq x(t_2) \leq x_2 + dx_2 \end{cases} = w_2\,(x_1, t_1; x_2 t_2)dx_1 dx_2$$

Свойства w_2:

$$dx_2 \int w_2(x_1, t_1; x_2 t_2)dx_1 = w_1(x_2, t_2)dx_2$$

$$dx_1 \int w_2(x_1, t_1; x_2 t_2)dx_2 = w_1(x_1, t_1)dx_1$$

Из каждого из этих утверждений следует нормировочное условие:

$$\int w_2 dx_1 dx_2 = 1$$

Появились два момента времени, поэтому рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{t_2\to t_1} w_2(x_1,t_1;x_2t_2) = w_1(x_1,t_1)\delta(x_2-x_1)$$

3) Найдем вероятность для n событий:

$$W\begin{cases} x_1 \le x(t_1) \le x_1+dx_1 \\ \dots \\ x_n \le x(t_n) \le x_n+dx_n \end{cases} = w_n(x_1,t_1;\dots;x_nt_n)dx_1\dots dx_n$$

И т.д.

Т.о., $x(t)$ задан, если известна $\{w_n\}$.

3. **Условные вероятности**

Вернемся к вероятности, описывающей два события:

$w_2(x_1,t_1;x_2t_2)dx_1dx_2 = w_1(x_1,t_1)dx_1 \cdot P_2(x_1,t_1|x_2t_2)dx_2$, где

$P_2((x_1,t_1|x_2t_2)dx_2$ – вероятность реализации второго события при условии, что первое уже состоялось (условная вероятность).

Нужно уточнить, что времена упорядочены: $t_2 \ge t_1$. Тогда событие в момент t_2 происходит после того, как совершилось событие t_1.

Можно сократить на dx_1, dx_2, тогда в результате:

$$w_2(x_1,t_1;x_2t_2) = w_1(x_1,t_1)\cdot P_2(x_1,t_1|x_2t_2)$$

Если проинтегрировать w_2 по dx_2, то:

$$\int w_2dx_2 = w_1(x_1,t_1)$$

Из этого следует:

а) $\int P_2(x_1,t_1|x_2t_2)dx_2 = 1$

Если теперь проинтегрировать w_2 по dx_1, то:

$$\int w_2dx_1 = w_1(x_2,t_2)$$

Следовательно:

б) $\int w_1(x_1,t_1)P_2(x_1,t_1|x_2t_2)dx_1 = w_1(x_2,t_2)$

Граничные условия:

Если вспомнить: $\lim\limits_{t_2\to t_{1+0}} w_2(x_1,t_1;x_2t_2) = w_1(x_1,t_1)\delta(x_2-x_1)$, то из этого следует:

в) $\lim\limits_{t_2\to t_{1+0}} P_2(x_1,t_1|x_2t_2) = \delta(x_2-x_1)$

Рассмотрим теперь:

$$w_3(x_1,t_1;x_2t_2;x_3t_3) \equiv w_2(x_1,t_1;x_2t_2)P_3(x_1,t_1;x_2t_2|x_3t_3)$$

Свойства P_3:

$$\int P_3 dx_3 = 1$$

Если P_3 умножить на w_2 и проинтегрировать по dx_1, то:

$$\int w_2P_3dx_1 = w_2(x_2,t_2;x_3,t_3)$$

Если теперь то же самое произведение проинтегрировать по dx_2, тогда:

$$\int w_2P_3dx_2 = w_2(x_1,t_1;x_3,t_3)$$

Теперь проинтегрируем и по dx_1, и по dx_2, тогда:

$$\int w_2P_3dx_1dx_2 = w_1(x_3,t_3)$$

.

Далее рассмотрим те случаи, когда какие-то два момента времени начинают сближаться.

Если рассмотреть предел:

$$\lim_{t_3\to t_{2+0}} P_3(x_1,t_1;x_2t_2|x_3t_3) = \delta(x_3-x_2)$$

Теперь сблизим t_1 и t_2, тогда:

$$\lim_{t_2\to t_{1+0}} P_3(x_1,t_1;x_2t_2|x_3t_3) = P_2(x_1,t_1|x_3,t_3) = P_2(x_2,t_2|x_3,t_3)$$

Построим P_n в общем случае. Для этого начнем с w_n:

$$w_n(x_1,t_1;\dots;x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n) \equiv w_{n-1}(x_1,t_1;\dots;x_{n-1},t_{n-1})P_n(x_1,t_1;\dots;x_{n-1},t_{n-1}|x_n,t_n)$$

Таким образом, $x(t)$ задан, если известны w_1 и $\{P_n\}, n\geq 2$.

4. **Стационарные случайные процессы**

$x(t)$ **стационарен** (в узком смысле), если $\forall n \geq 1$ выполняется равенство:

$$w_n(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n) = w_n(x_1,t_1+\tau;\dots;x_n,t_n+\tau)$$

Начнем с w_1:

$$w_1(x_1,t_1) = w_1(x_1,t_1+\tau)_{\tau=-t_1} = w_1(x_1,0) = w_1(x_1)$$

$$w_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = w_2(x_1,t_1+\tau;x_2,t_2+\tau)_{\tau=-t_1} = w_2(x_1,x_2,t)_{t=t_2-t_1}$$

Функции w можно задать через P. Если мы рассмотрим P_2, то:

$$P_2(x_1,t_1|x_2,t_2) = P_2(x_1,t_1+\tau|x_2,t_2+\tau)_{\tau=-t_1} = P_2(x_1|x_2,t)$$

5. **Марковские случайные процессы первого порядка**

Пусть условная вероятность $P_n(x_1,t_1;\dots;x_{n-1},t_{n-1}|x_n,t_n)_{n\geq 3} = P_2(x_{n-1},t_{n-1}|x_n,t_n)$, тогда случайный процесс $x(t)$ называют **марковским процессом первого порядка**.

Пусть $x(t)$ стационарен. Тогда:

$$P_2(x_1,t_1|x_2,t_2) = P_2(x_1|x_2,t)$$

$$\int P_2(x_1,x_2,t)dx_2 = 1$$

$$\int P_2(x_1,x_2,t)dx_1 = w_1(x_2)$$

$$\lim_{t\to+0} P_2(x_1,x_2,t) = \delta(x_2-x_1)$$

Если процесс остается марковским, то мы получаем:

$$w_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = w_1(x_1,t_1)P(x_1,t_1|x_2,t_2), \text{ где } P_2 \equiv P.$$

$$w_3(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3) = w_2(x_1,t_1;x_2,t_2)P_3(x_1,t_1;x_2,t_2|x_3,t_3) =$$
$$= w_1(x_1,t_1)P(x_1,t_1|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_3,t_3)$$

Мы видим, что каждая новая функция распределения отличается от предыдущей лишним сомножителем P.

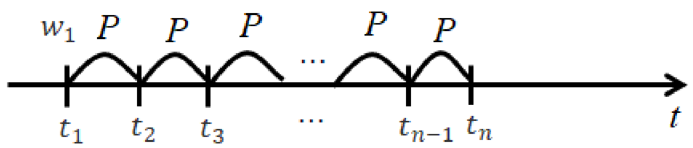

Рис.9 Ось времени

Значит, для того, чтобы описать марковский процесс первого порядка, нужно знать две величины: w_1, P.

Лекция 5

§8. Марковские процессы и уравнение Смолуховского

Рассмотрим три момента времени t_1, t_2, t_3 (см. рис.10). Тогда вероятность того, что в каждый из этих моментов времени наблюдается случайная величина x на заданном интервале:

$$w_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

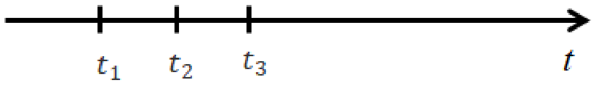

Рис.10 Ось времени

Для марковского процесса:

$$w_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = w_1(x_1, t_1) P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3)$$

Проинтегрируем w_3 по dx_2:

$$\int w_3 dx_2 = w_1(x_1, t_1) \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3)\, dx_2$$

$$\int w_3 dx_2 = w_2(x_1, t_1; x_3, t_3) = w_1(x_1, t_1) \cdot P(x_1, t_1 | x_3, t_3)$$

Приравняем правые части записанных выше равенств, тогда:

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3)\, dx_2$$ – уравнение Смолуховского

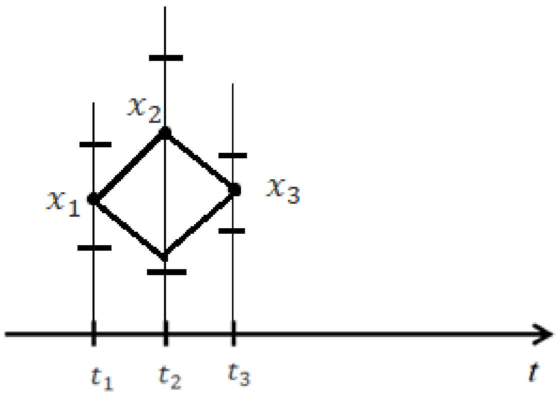

Рис.11 Интерпретация уравнения Смолуховского

Если марковский процесс – стационарный, тогда:

$$P(x_1, x_3, t + \tau) = \int P(x_1, x_2, t) P(x_2, x_3, \tau) dx_2$$

$$t_2 - t_1 = t, t_3 - t_2 = \tau$$

§9. Вывод уравнения Фоккера-Планка из уравнения Смолуховского

1. $P(x_0, x, t + \Delta t) = \int P(x_0, \xi, t)\, P(\xi, x\Delta t) d\xi$

2. $F(x)$ – произвольная.

$$\overline{F(x)} \equiv \int F(x) P(x_0, x, t) dx = \overline{F(t)}$$

Построим производную по времени:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\bar{F}\,(t + \Delta t) - \bar{F}(t)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\iint F(x) P(x_0,\ \xi, t) P(\xi, x, \Delta t) d\xi dx - \int F(x) P(x_0, x, t) dx]$$

Заменим ξ на x, а x на ξ. Тогда:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\iint F(\xi) P(x_0,\ x, t) P(x, \xi, \Delta t) dx d\xi - \int F(x) P(x_0, x, t) dx]$$

В обоих интегралах в подынтегральных функциях появился общий множитель $P(x_0, x, t)$. Получаем:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int dx P(x_0, x, t)\, [\int F(\xi) P(x, \xi, \Delta t)\, d\xi - F(x)]$$

$\Delta t \to 0$. Тогда $P(x, \xi, \Delta t) \to \delta(\xi - x)$

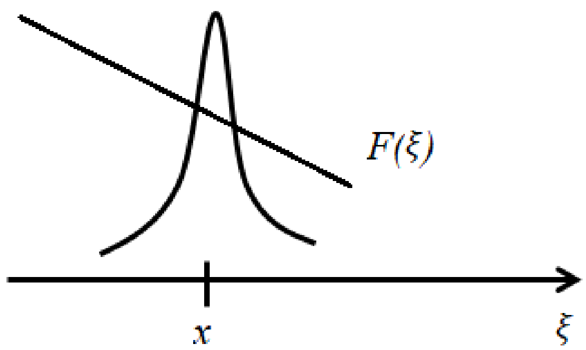

Рис.12 График P от ξ

$$F(\xi) = F(x) + F'(x) \cdot (\xi - x) + \frac{1}{2!} F''(x) \cdot (\xi - x)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x) \cdot (\xi - x)^k}{k!}$$

Результат интегрирования:

$$M_0 = \int P(x, \xi, \Delta t) d\xi = 1$$

$$M_1 = \int (\xi - x) P(x, \xi, \Delta t) d\xi = M_1(x, \Delta t)$$

$$M_2 = \int (\xi - x)^2 P(x, \xi, \Delta t) d\xi = M_2(x, \Delta t)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$M_k = \int (\xi - x)^k P(x, \xi, \Delta t) d\xi = M_k(x, \Delta t)$$

Когда $\Delta t \to 0$, все эти числа, кроме M_0, стремятся к нулю.

$$\lim_{\Delta t \to 0} M_i(x, \Delta t) = 0, \forall i \geq 1$$

Если подставить все это в исходное выражение, тогда:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int dx P(x_0, x, t) \left[F(x) + F'(x) \cdot M_1 + \frac{1}{2!} F(x) \cdot M_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x)}{k!} M_k - F(x) \right] =$$

$$= \int dx P(x_0, x, t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[F'(x) \cdot M_1 + \frac{1}{2!} F(x) \cdot M_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x)}{k!} M_k \right]$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_1(x, \Delta t)}{\Delta t} = A(x)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_2(x, \Delta t)}{\Delta t} = 2B(x)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_k(x, \Delta t)}{\Delta t} = 0, k \geq 3$$

Подставляя результаты предельных переходов, получим:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \int P(x_0, x, t) \left[F'(x) A(x) + \frac{F''(x)}{2!} \cdot 2B(x) \right] dx$$

$$\int PA(F' dx) = (PA) \cdot F_{\Gamma_x} - \int F \frac{\partial}{\partial x} (PA) dx$$

Нужно обнулить «внеинтегральное» слагаемое, для этого заявим: F такая, что:

$$(PA) \cdot F_{\Gamma_x} = 0$$

$$\int PB(F'' dx) = (PB) \cdot F'_{\Gamma_x} - \int \frac{\partial}{\partial x} (PB) F' dx$$

Пусть F такая, что:

$$(PB) \cdot F'_{\Gamma_x} = 0$$

Тогда

$$\int PB(F''dx) = -F\frac{\partial}{\partial x}(PB)_{\Gamma_x} + \int F\frac{\partial^2}{\partial x^2}(PB)dx$$

Снова потребуем, чтобы функция F была такой, что:

$$-F\frac{\partial}{\partial x}(PB)_{\Gamma_x} = 0$$

В результате:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \int F(x)[-\frac{\partial}{\partial x}(PA) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(PB)]dx$$

$$\bar{F} = \int P(x_0, x, t)F(x)dx$$

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \int \frac{\partial P}{\partial t}\cdot F(x)dx$$

Из второго вычитаем первое, получаем:

$$0 = \int F(x)\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(PA) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(PB)\right]dx$$

Получаем уравнение в следующей форме:

$\frac{\partial P(x_0,x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(P\cdot A(x)\big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(P\cdot B(x)\big) = 0$ – уравнение Фоккера-Планка

Выпишем полученное ранее уравнение Фоккера-Планка (см.Лекция 3):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left[-Dgrad\rho - \frac{\rho}{\gamma}gradU\right] = 0$$

$$-\frac{1}{\gamma}gradU = \overrightarrow{v_{\text{ГД}}} = A(x)$$

$$D = B(x)$$

§10. Функция временной корреляции случайного процесса и её спектральные свойства

1. Пусть есть случайный процесс $x(t)$. Построим среднее от него:

$$\overline{x(t_1)} = \int x_1 w_1(x_1, t_1)dx_1$$

$$\overline{x^2(t_1)} = \int {x_1}^2 w_1(x_1, t_1)dx_1$$

Смешанный момент:

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = \int x_1 x_2 w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1\, dx_2$$

...

2. Введем самую простую функцию временной корреляции.

$F_x(t_1, t_2)$ – функция временной корреляции для процесса x, как функция двух моментов времени:

$$F_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} - \overline{x(t_1)} \cdot \overline{x(t_2)}$$

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{t_2 \to t_1} F_x(t_1, t_2) = \overline{x^2(t_1)} - \left(\overline{x(t_1)}\right)^2 = D_x(t_1) \text{ – дисперсия.}$$

3. Пусть $x(t)$ – стационарный в узком смысле. Тогда:

$$w_1(x_1, t_1) = w_1(x_1)$$

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = w_2(x_1, x_2, t); t = t_2 - t_1$$

Получаем:

1. $\overline{x(t)} = \bar{x} = const$

$\overline{x^2(t)} = \overline{x^2} = const$

2. $F_x(t_1, t_2) = F_x(t); t = t_2 - t_1$

3. $D_x(t) = D_x = const$

Рассмотрим марковский процесс первого порядка. Достаточно задать w_1 и P. Если он стационарен в узком смысле, то

$$w_1 = w_1(x_1)$$

$$P = P(x_1, x_2, t)$$

4. **Корреляционная теория** – теория, которая оперирует тремя величинами: средняя величина, дисперсия и временная корреляционная функция, и для её описания достаточно двух функций $w_1 = w_1(x_1)$, $P = P(x_1, x_2, t)$.

Условие стационарности в широком смысле:

Пусть $\overline{x(t)} = \bar{x} = const$, $F_x(t_1, t_2) = F_x(t); t = t_2 - t_1$, $D_x(t) = D_x = const$, тогда $x(t)$ стационарен в широком смысле.

5. Спектральные свойства

Случайный процесс $x(t)$ можно представить через Фурье-преобразование:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_w e^{-iwt} dw$$

$$x_w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{iwt}\, e^{-\varepsilon|t|} dt,$$

$e^{-\varepsilon|t|}$ - множитель выключения (адиабатический), $\varepsilon \to +0$.

Пусть $x(t)$ стационарен, тогда $\bar{x} = const$. Положим $\bar{x} = 0$. Тогда

$$F_x(t_1, t_2) = \overline{x^*(t_1) x(t_2)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{x^*{}_w x_{w'}}\, e^{i\omega t_1 - i\omega' t_2} dw dw' = F_x(t_2 - t_1)$$

Лекция 6

Вернемся к функции временной корреляции:

$$F_x(t_1,t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{x^*{}_w x_{w'}}\, e^{i\omega t_1 - i\omega' t_2} dw dw'$$

Стационарный процесс $x(t)$:

$$F_x = F_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(w) e^{-i\omega t} dw \text{ – обратное Фурье-преобразование}$$

Пусть $t = t_2 - t_1$.

$$wt_1 - w'(t_1 + t) = (w - w')t_1 - w't$$

$$\overline{x^*{}_w x_{w'}} = g_x(w)\delta(w - w') \text{ – условие стационарности}$$

$$g_x(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(t) e^{iwt} dt \text{ – прямое Фурье-преобразование}$$

6. **«Белый шум»**

«Белый шум» - стационарный процесс; $g_x(w) = const = g_x(0)$.

$$F_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_x(0) e^{i\omega t} dw = g_x(0)\cdot 2\pi\delta(t)$$

Проверка:

$$g_x(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_x(0)\cdot 2\pi\delta(t) e^{i\omega t} dt = g_x(0)$$

Дисперсия x:

$$D_x = \lim_{t\to 0} F_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(0) dw \text{ – расходится.}$$

Модифицируем определение: оставляем требование стационарности, а $g_x(w)$ переопределяем иначе:

$$g_x(w) = \begin{cases} g_x(0), |w| \le \Delta w \\ 0, |w| > \Delta w \end{cases}$$

$$F_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_x(w) e^{-i\omega t} dw = g_x(0)\int\limits_{-\Delta w}^{+\Delta w} e^{-i\omega t} dw = g_x(0)\frac{e^{-i\Delta\omega t} - e^{i\Delta\omega t}}{-it} =$$
$$= g_x(0)\frac{2\sin(\Delta w t)}{t}$$

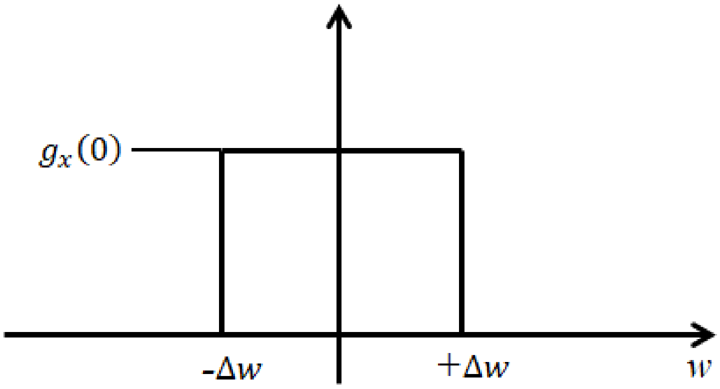

Рис.13 Графическая интерпретация $g_x(w)$

Тогда:

$$D_x = \lim_{t\to 0} F_x(t) = g_x(0)\cdot 2\Delta w$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(w)dw = g_x(0)\cdot 2\Delta w$$

§11. Стохастическое дифференциальное уравнение и формула Эйнштейна

1. Рассмотрим брауновскую частицу произвольных размеров. Положим $gradU \equiv 0, x \in (-\infty; +\infty)$. Тогда уравнение движения:

$$m\dot{v} = -\gamma v + f_{\text{сл}}$$

Мы рассматриваем значения $t > \tau$ такого, что за это время случайная сила $f_{\text{сл}}$ становится стационарной, причем с условием $\bar{f} = 0$. Следовательно, Фурье-образ $\overline{f_w} = 0$.

Решение уравнения движения в общем виде:

$$v(t) = v_{\text{одн}}(t) + v_{\text{неодн}}(t)$$

Запишем уравнение в следующем виде:

$$m\dot{v} + \gamma v = f(t)$$

Однородное уравнение:

$$m\dot{v} + \gamma v = 0$$

$$\dot{v} + \Gamma v = 0, \Gamma = \frac{\gamma}{m}$$

Решение однородного уравнения:

$$v_{\text{одн}}(t) = Ae^{-\Gamma t}$$

Перейдем к Фурье-представлению. Для этого заявим:

$$v(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_\omega e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t} d\omega$$

Подставим оба представления в исходное уравнение, тогда получим:

$$\dot{v} + \Gamma v = \frac{1}{m} f(t)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -i\omega v_\omega e^{-i\omega t} d\omega + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma v_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} f_\omega e^{-i\omega t} d\omega$$

Используем теорему: если функции равны, их Фурье-образы также равны, и обратно. Получаем:

$$(-i\omega + \Gamma) v_\omega = \frac{1}{m} f_\omega$$

$$v_w = \frac{1}{m} \frac{\omega}{\Gamma - i\omega}$$

Тогда $v_{\text{неодн}}(t)$ строится через обратное Фурье-преобразование:

$$v_{\text{неодн}}(t) = \frac{1}{m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

Значит,

$$v(t) = Ae^{-\Gamma t} + \frac{1}{m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

Сформулируем эту задачу, как задачу с начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{v} + \Gamma v = \dfrac{1}{m} f(t) - \text{уравнение Ланжевена} \\ v(t = 0) = v_0 \end{cases}$$

$$v_0 = A + \frac{1}{m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega} d\omega$$

Следовательно,

$$A = v_0 - \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - iw} d\omega$$

Получаем:

$$v(t) = v_0 e^{-\Gamma t} + \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega}\left(e^{-i\omega t} - e^{-\Gamma t}\right) d\omega = v_0 e^{-\Gamma t} + \tilde{v}(t)$$

2. $\overline{v(t)} = v_0 e^{-\Gamma t} + \overline{\tilde{v}(t)}$

$$\overline{f_\omega} = 0 \Rightarrow \overline{\tilde{v}(t)} = 0, t > \tau$$

Тогда:

$$\overline{v(t)} = v_0 e^{-\Gamma t}$$

Этот процесс нестационарный.

$\overline{v(t)} \cong 0$ при $\Gamma t \gg 1$ – часть определения стационарного процесса.

3. Посчитаем дисперсию v:

$$D_v(t) = \overline{\left|v(t) - \overline{v(t)}\right|^2} = \overline{|\tilde{v}(t)|^2} = \overline{\tilde{v}^*(t)\tilde{v}(t)} =$$
$$= \frac{1}{m^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{f_\omega^* f_{\omega'}}\left(e^{i\omega t} - e^{-\Gamma t}\right)\left(e^{-i\omega' t} - e^{-\Gamma t}\right)}{(\Gamma + i\omega)(\Gamma - i\omega')} d\omega d\omega'$$

$$f(t) - \text{стац.} \Rightarrow \overline{f_\omega^* f_{\omega'}} = g_f(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

Тогда:

$$D_v(t) = \frac{1}{m^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_f(\omega)\left(e^{i\omega t} - e^{-\Gamma t}\right)\left(e^{-i\omega t} - e^{-\Gamma t}\right)}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega$$

$f(t)$ – белый шум, $g_f(\omega) = g_f(0) = const$

$$D_v(t) = \frac{g_f(0)}{m^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-\Gamma t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + e^{-2\Gamma t}}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} = \frac{\pi}{\Gamma}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\omega t}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega$$

Будем рассматривать комплексную плоскость ω (см. рис.14)

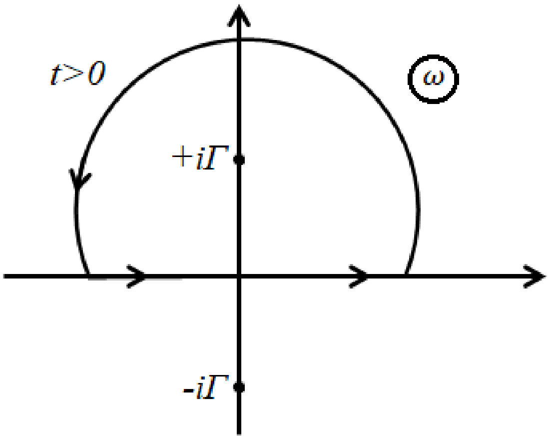

Рис.14 Комплексная плоскость ω

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega$$

$$I = 2\pi i \frac{e^{i\cdot i\Gamma\cdot t}}{2i\Gamma} = \frac{\pi}{\Gamma} e^{-\Gamma t}$$

Рассмотрим случай $t < 0$. Тогда:

$$I = -2\pi i \frac{e^{i\cdot(-i\Gamma)\cdot t}}{-2i\Gamma} = \frac{\pi}{\Gamma} e^{\Gamma t}$$

Из этого следует:

$$I = \frac{\pi}{\Gamma} e^{-\Gamma|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega$$

Подставляем эти результаты в интеграл для дисперсии:

$$D_v(t) = \frac{g_f(0)}{m^2}\left[(1 + e^{-2\Gamma t})\frac{\pi}{\Gamma} - 2e^{-\Gamma t}\frac{\pi}{\Gamma} e^{-\Gamma t}\right] = \frac{\pi}{\Gamma}\frac{g_f(0)}{m^2}[1 - e^{-2\Gamma t}], \qquad t > \tau.$$

Пусть $t \to +\infty$. Тогда:

$$\boxed{D_v(t) \to \overline{|v(t)|^2} = \frac{\theta}{m} = \frac{\pi}{\Gamma}\frac{g_f(0)}{m^2}}$$

$$D_v(t) = \frac{\theta}{m}[1 - e^{-2\Gamma t}], t > \tau$$

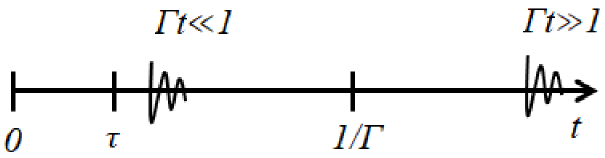

Рис.15 Ось времени

Пусть $\Gamma t \ll 1$. Тогда:

$$D_v(t)_{\Gamma t \ll 1} \cong \frac{\theta}{m} \cdot 2\Gamma t = 2\frac{\theta\gamma}{m^2} t \text{ – формула Эйнштейна.}$$

Если считать, что частица примерно шарообразной формы, тогда $\gamma = 6\pi a \eta$, где η – коэффициент внутреннего трения.

$$D_v(t)_{\Gamma t \ll 1} \cong \frac{\theta}{m} = const$$

4. Посчитаем $\overline{|v(t) - v_0|^2}$:

$$\overline{|v(t) - v_0|^2} = \overline{|v_0 e^{-\Gamma t} + \tilde{v}(t) - v_0|^2}$$

Случайная сила на нашем режиме времен устроена так, что $\overline{\tilde{v}(t)} = 0$. Тогда:

$$\overline{|v(t) - v_0|^2} = v_0^2 (e^{-\Gamma t} - 1)^2 + \overline{|\tilde{v}(t)|^2} = v_0^2 (e^{-\Gamma t} - 1)^2 + D_v(t) =$$
$$= v_0^2 (e^{-\Gamma t} - 1)^2 + \frac{\theta}{m}[1 - e^{-2\Gamma t}]$$

$\Gamma t \ll 1$:

$$\overline{|v(t) - v_0|^2} \cong v_0^2 (\Gamma t)^2 + \frac{\theta}{m} \cdot 2\Gamma t \cong \frac{\theta}{m} \cdot 2\Gamma t$$

$\Gamma t \gg 1$:

$$\overline{|v(t) - v_0|^2} \cong v_0^2 + \frac{\theta}{m}$$

5. Построим временную корреляционную функцию для скорости:

$$F_v(t_1, t_2) = \overline{v^*(t_1) v(t_2)} - \overline{v^*(t_1)} \cdot \overline{v(t_2)}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\Gamma t} + \tilde{v}(t)$$

$$F_v(t_1, t_2) = \overline{\tilde{v}^*(t_1) \cdot \tilde{v}(t_2)} = \frac{1}{m^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{f_\omega^* f_{\omega'}}}{\omega^2 + \Gamma^2} \left(e^{i\omega t_1} - e^{-\Gamma t_1}\right)\left(e^{i\omega' t_2} - e^{-\Gamma t_2}\right) d\omega d\omega'$$

$f(t)$ – «белый шум». Значит:

$$\begin{cases} \overline{f_\omega^* f_{\omega'}} = g_f(\omega)\delta(\omega - \omega') \\ g_f(\omega) = const = g_f(0) \end{cases}$$

$$F_v(t_1, t_2) = \frac{g_f(0)}{m^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t_1 - t_2)} - e^{-\Gamma t_1} e^{-i\omega t_2} - e^{-\Gamma t_2} e^{i\omega t_1} + e^{-\Gamma(t_1 + t_2)}}{\omega^2 + \Gamma^2} d\omega$$

$$= \frac{g_f(0)}{m^2} \frac{\pi}{\Gamma} \left[e^{-\Gamma(t_2 - t_1)} - e^{-\Gamma(t_1 + t_2)} - e^{-\Gamma(t_1 + t_2)} + e^{-\Gamma(t_1 + t_2)} \right]$$

$$F_v(t_1, t_2) = \frac{\theta}{m} \left[e^{-\Gamma(t_2 - t_1)} - e^{-\Gamma(t_1 + t_2)} - e^{-\Gamma(t_1 + t_2)} \right]$$

Лекция 7

Вернемся к результатам прошлой лекции (см. Лекция 6):

$$F_v(t_1, t_2) = \overline{\tilde{v}^*(t_1) \cdot \tilde{v}(t_2)} = \frac{g_f(0)}{m^2}\frac{\pi}{\Gamma}\left[e^{-|t_2 - t_1|} - e^{-\Gamma(t_1 + t_2)}\right]$$

Преобразуем это выражение.

$$F_v(t_1, t_2) = F_v(t), t = t_2 - t_1$$

при $\begin{cases} \Gamma t_1 \gg 1 \\ \Gamma t_2 \gg 1 \end{cases}$

$\Gamma t \gg 1$:

$$\begin{cases} \overline{v(t)} = 0 \\ \overline{|\Delta v(t)|^2} = \dfrac{\theta}{m} \\ F_v(t_1, t_2) = F_v(t) \end{cases}$$

$v(t)$ – стац. (в широком смысле) при $\Gamma t \gg 1$.

6. Найдем средний квадрат смещения частицы от начального положения. Пусть есть $x(t)$.

$$\Delta x = x(t) - x_0 = \int_0^t v(t_1) dt_1$$

$$v(t) = v_0 e^{-\Gamma t} + \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega}\left(e^{-i\omega t} - e^{-\Gamma t}\right) d\omega$$

Пусть $\Gamma t \gg 1$. Тогда:

$$v(t)_{\Gamma t \gg 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\Delta x = \int_0^t dt_1 \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega} e^{-i\omega t_1} d\omega = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega}\left(\int_0^t e^{-i\omega t_1} dt_1\right) d\omega$$
$$= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\omega}{\Gamma - i\omega}\left(\frac{e^{-i\omega t} - 1}{-i\omega}\right) d\omega$$

Искомая величина: $\overline{|\Delta x(t)|^2}$:

$$\overline{|\Delta x(t)|^2} = \frac{1}{m^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{f^*_\omega f_{\omega'}}\left(e^{i\omega t}-1\right)\left(e^{-i\omega' t}-1\right)}{(\Gamma+i\omega)(\Gamma-i\omega')\omega\omega'}d\omega d\omega'$$

$f(t)$ – стац., следовательно, $\overline{f^*_\omega f_{\omega'}} = g_f(\omega)\delta(\omega-\omega')$.

$$\overline{|\Delta x|^2} = \frac{1}{m^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_f(\omega)\left(e^{i\omega t}-1\right)\left(e^{-i\omega t}-1\right)}{(\omega^2+\Gamma^2)\omega^2}d\omega$$

$f(t)$ – белый шум. $g_f(\omega) = g_f(0) = const$.

$$\overline{|\Delta x|^2} = \frac{g_f(0)}{m^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-cos\omega t)}{(\omega^2+\Gamma^2)\omega^2}d\omega$$

$$\frac{1}{(\omega^2+\Gamma^2)\omega^2} = \frac{1}{\Gamma^2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2+\Gamma^2}\right)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-cos\omega t)}{\omega^2+\Gamma^2}d\omega = 2\cdot\frac{\pi}{\Gamma}\left(1-e^{-\Gamma t}\right)$$

Пояснение к последнему равенству:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\omega t}{\omega^2+\Gamma^2}d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\Gamma^2}d\omega = \frac{\pi}{\Gamma}e^{-\Gamma|t|}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-cos\omega t)}{\omega^2}d\omega = \lim_{\Gamma\to 0}2\cdot\frac{\pi}{\Gamma}\left(1-e^{-\Gamma t}\right) = 2\pi t$$

Собираем всё в конечный результат:

$$\overline{|\Delta x|^2} = \frac{g_f(0)}{m^2}\frac{2}{\Gamma^2}\left\{\pi t-\frac{\pi}{\Gamma}\left(1-e^{-\Gamma t}\right)\right\}$$

Мы считали эту величину, полагая, что $\Gamma t \gg 1$. Тогда

$$\overline{|\Delta x|^2}_{\Gamma t\gg 1} \cong 2\frac{g_f(0)}{m^2\Gamma^2}\pi t = 2\frac{\theta}{m\Gamma}t = 2Dt, \text{ где}$$

D – коэффициент диффузии.

$$\boxed{\overline{|\Delta x|^2}_{\Gamma t\gg 1} \cong 2Dt} \text{ – формула Эйнштейна}$$

Замечание

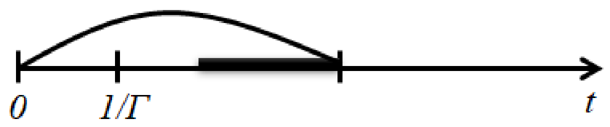

Рис.16 Ось времени

Мы интегрировали $v(t)$ от 0 до t, используя при этом асимптотику, которая справедлива только при $\Gamma t \gg 1$. Т.е. эта асимптотика дозволительна сильно правее (см. рис.16), а мы её использовали всюду. Это действительно не тот результат, который бы получился точно, но это его асимптотически замещающая часть. Потому что то, что происходит в области от 0 до 1/Г, выглядит, как $v(t)$, заданное аналитически иначе. Но вклад интервала времени мал. Среднее по времени в окрестности начала координат для скорости ограничено, порядка v_0, а v_0 конечная величина. При больших t среднее $v(t)$ идет к нулю, но и при малых t она не дает аномалии. Поэтому результат, который м построили, имеет право на существование.

§12. Уравнение Лиувилля.

1. Будем рассматривать систему, состоящую из N материальных точек.

Тогда в выбранный момент времени t: $(p, q) = (\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{p_1}; \dots; \overrightarrow{r_N}, \overrightarrow{p_N})$

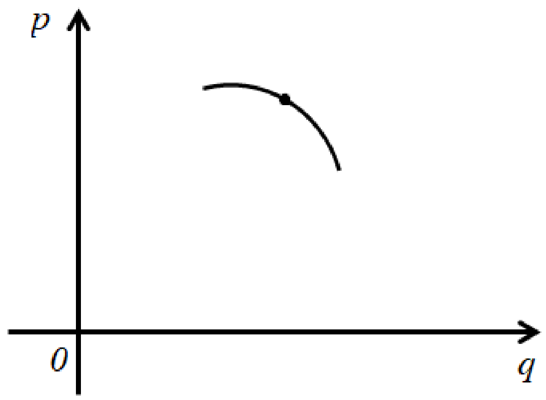

Рис.17 Графическая интерпретация

Вероятность того, что в момент времени t точка, изображающая нашу систему в многомерном пространстве, попадает в пробный объем элементарно малых размеров:

$$w_N(t, p, q)dpdq$$

Нормировка:

$$\int w_N(t, p, q)dpdq = 1$$

$$\int w_N(t,p,q)dq = w_N(t,p)$$

$$N\int w_N(t,p,q)dp = n(t,q), \text{ где}$$

n – концентрация.

$$(\vec{r_i},\vec{p_i}) \Leftrightarrow (\vec{r_j},\vec{p_j})$$

Если задать систему с помощью гамильтониана, то мы выберем вполне определенный вид:

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N}U(\vec{r_i}) + \sum\sum_{1\le i\le j\le N}\Phi(|\vec{r_i}-\vec{r_j}|)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r_i}} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{p_i}} \\ \dot{\vec{p_i}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{r_i}} \end{cases}$$

2. Исходя из нормировки $\int w_N(t,p,q)dpdq = 1$, можно сделать вывод: функцию w_N можно описывать уравнением непрерывности.

Уравнение непрерывности в пространстве p и q ($6N$-мерном пространстве):

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} + Div_{6N}(w_N\cdot\overrightarrow{v_{6N}}) = 0$$

$$\overrightarrow{v_{6N}} \equiv (\dot{\vec{r_1}},\dot{\vec{p_1}};\dots;\dot{\vec{r_N}},\dot{\vec{p_N}})$$

$$\vec{\nabla}_{6N} = \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r_1}},\frac{\partial}{\partial\vec{p_1}};\dots;\frac{\partial}{\partial\vec{r_N}},\frac{\partial}{\partial\vec{p_N}}\right)$$

Тогда

$$0 = \frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial}{\partial\vec{r_i}}(w_N\dot{\vec{r_i}}) + \frac{\partial}{\partial\vec{p_i}}(w_N\dot{\vec{p_i}})\right\} = \frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial}{\partial\vec{r_i}}\left(w_N\frac{\partial H}{\partial\vec{p_i}}\right) - \frac{\partial}{\partial\vec{p_i}}\left(w_N\frac{\partial H}{\partial\vec{r_i}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial w_N}{\partial\vec{r_i}}\frac{\partial H}{\partial\vec{p_i}} + w_N\frac{\partial^2 H}{\partial\vec{r_i}\partial\vec{p_i}} - \frac{\partial w_N}{\partial\vec{p_i}}\frac{\partial H}{\partial\vec{r_i}} - w_N\frac{\partial^2 H}{\partial\vec{p_i}\partial\vec{r_i}}\right\} =$$

$$= \frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial w_N}{\partial\vec{r_i}}\frac{\partial H}{\partial\vec{p_i}} - \frac{\partial w_N}{\partial\vec{p_i}}\frac{\partial H}{\partial\vec{r_i}}\right\}$$

Скобки Пуассона:

$$\{f,g\}_{\text{классич.}} \equiv \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial f}{\partial \vec{p_i}}\frac{\partial g}{\partial \vec{r_i}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{r_i}}\frac{\partial g}{\partial \vec{p_i}}\right\}$$

Тогда:

$$\boxed{\frac{\partial w_N}{\partial t} + \{H, w_N\}_{\text{классич.}} = 0} \text{ – уравнение Лиувилля}$$

Уравнение Лиувилля в другой форме:

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial w_N}{\partial \vec{r_i}}\dot{\vec{r_i}} + \frac{\partial w_N}{\partial \vec{p_i}}\dot{\vec{p_i}}\right\} \boxed{\equiv}$$

Поскольку w_N рассматривалась как функция от t,p,q: $w_N(t,p,q)$, то

$$\boxed{\equiv}\, \frac{\partial w_N}{\partial t} = 0$$

Замечание

1) Уравнение Лиувилля в форме $\frac{\partial w_N}{\partial t} = 0$ не стыкуется с нулевым началом термодинамики (независимо от начальных условий система самопроизвольно при заданных внешних условиях приходит к равновесному состоянию). В уравнении же Лиувилля есть информация о начальных условиях.

2) Переход к равновесию по нулевому началу идет необратимо. А по гамильтониану нашей системы её механика вполне обратима (нет никаких диссипативных вкладов, все силы потенциальны). Возникает вопрос: «Как на основе этой обратимой задачи перейти к необратимому описанию?»

§13. Кинетические функции распределения.

1. **Одночастичная кинетическая функция распределения.**

$$F_1(t,\vec{r_1},\vec{p_1}) \equiv V\int w_N(t,p,q)\,d\vec{r_2}d\vec{p_2}\dots d\vec{r_N}d\vec{p_N}$$

$\frac{1}{V}F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p}$ – вероятность.

$$\frac{1}{V}\int F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p} = 1$$

$$\frac{N}{V}\int F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p} = n(t,\vec{r})$$

2. Теперь вычислим средние.

а)

$$\frac{\int \frac{\vec{p}}{m} F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}}{\int F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}} = \vec{U}(t,\vec{r})$$

$$\frac{\frac{N}{V}\int \frac{\vec{p}}{m} F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}}{n(t,\vec{r})} = \vec{U}(t,\vec{r})$$

б)

$$\frac{\frac{N}{V}\int \frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{p^2}{2m} F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}}{\frac{N}{V}\int F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}} = q(t,\vec{r})$$

q – плотность потока кинетической энергии (плотность потока количества теплоты при тепловом движении).

в) Сконструируем среднюю кинетическую энергию теплового движения, предполагая, что гидродинамическое течение есть.

$$\frac{\frac{N}{V}\int \frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{U}(t,\vec{r})\right)^2 F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}}{\frac{N}{V}\int F_1(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}} = \frac{3}{2}\theta(t,\vec{r})$$

Лекция 8

3. Введем двухчастичную кинетическую функцию распределения.

$$F_2(t,\vec{r_1},\vec{p_1};\vec{r_2},\vec{p_2}) \equiv V^2 \int w_N(t,p,q)d\vec{r_3}d\vec{p_3} \dots d\vec{r_N}d\vec{p_N}$$

$\frac{1}{V^2}F_2(t,\vec{r_1},\vec{p_1};\vec{r_2},\vec{p_2})d\vec{r_1}d\vec{p_1}d\vec{r_2}d\vec{p_2}$ – вероятность того, что в момент времени t первая частица находится в элементарном фазовом объеме $\overrightarrow{dr_1}\overrightarrow{dp_1}$ около точки $\vec{r_1},\vec{p_1}$, а вторая частица – в элементарном объеме $d\vec{r_2}d\vec{p_2}$ около точки $\vec{r_2},\vec{p_2}$ в своем 6-мерном фазовом пространстве.

Нормировка:

$$\int \frac{1}{V^2}F_2(t,\vec{r_1},\vec{p_1};\vec{r_2},\vec{p_2})d\vec{r_1}d\vec{p_1}d\vec{r_2}d\vec{p_2} = 1$$

$$F_2(t,\vec{r_1},\vec{p_1};\vec{r_2},\vec{p_2}) = F_2(t,\vec{r_2},\vec{p_2},\vec{r_1},\vec{p_1})$$

§14. Цепочка уравнений Боголюбова для кинетических функций распределения.

1. Запишем уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} + \{H, w_N\}_{\text{классич.}} = 0$$

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial r_i^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial r_i^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial p_i^\alpha}\right)\right\} = 0$$

На каждое слагаемое в равенстве выше обращается операция следующего вида:

$$V\int (\dots)d\vec{r_2}d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N}d\vec{p_N}$$

$$V\int \frac{\partial w_N}{\partial t}d\vec{r_2}d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N}d\vec{p_N} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)$$
$$+ v\int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p_1}}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial \vec{r_1}}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r_1}}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial \vec{p_1}}\right)\right]d\vec{r_2}d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N}d\vec{p_N}$$
$$+ \sum_{i=2}^{N} V\int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial r_i^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial r_i^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial p_i^\alpha}\right)\right]d\vec{r_2}d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N}d\vec{p_N} = 0$$

Попробуем упростить этот результат.

$$\int dr_i^\alpha dp_i^\alpha \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial r_i^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial r_i^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w_N}{\partial p_i^\alpha}\right)\right]$$

$$= \int dp_i^\alpha \left\{\frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}\cdot w_N\Bigg|_{\Gamma_{r_i^\alpha}} - \int dr_i^\alpha w_N \frac{\partial^2 H}{\partial r_i^\alpha \partial p_i^\alpha}\right\} - \int dr_i^\alpha \left\{\frac{\partial H}{\partial r_i^\alpha}\cdot w_N\Bigg|_{\Gamma_{p_i^\alpha}}\right.$$

$$\left. - \int dp_i^\alpha w_N \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^\alpha \partial r_i^\alpha}\right\} \boxed{=}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}\cdot w_N\Bigg|_{\Gamma_{r_i^\alpha}} = 0;\ \frac{\partial H}{\partial r_i^\alpha}\cdot w_N\Bigg|_{\Gamma_{p_i^\alpha}} = 0$$

$$\boxed{=}\ 0$$

Вспомним, что

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N} U(\vec{r_i}) + \sum\sum_{1\le i\le j\le N} \Phi\left(\left|\vec{r_i} - \vec{r_j}\right|\right)$$

Строим $\frac{\partial H}{\partial \vec{p_1}}$:

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p_1}} = \frac{\vec{p_1}}{m};\ \frac{\partial H}{\partial \vec{r_1}} = \frac{\partial U(\vec{r_1})}{\partial \vec{r_1}} + \sum_{j=2}^{N}\frac{\partial \Phi\left(\left|\vec{r_1} - \vec{r_j}\right|\right)}{\partial \vec{r_1}}$$

Тогда:

$$\frac{\vec{p_1}}{m} V \int \frac{\partial w_N}{\partial \vec{r_1}} d\vec{r_2} d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N} d\vec{p_N}$$

$$- \frac{\partial U(\vec{r_1})}{\partial \vec{r_1}} V \frac{\partial w_N}{\partial \vec{p_1}} d\vec{r_2} d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N} d\vec{p_N} - \sum_{j=2}^{N} V \int \frac{\partial \Phi\left(\left|\vec{r_1} - \vec{r_j}\right|\right)}{\partial \vec{r_1}} \frac{\partial w_N}{\partial \vec{p_1}} d\vec{r_2} d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N} d\vec{p_N}$$

Получаем:

$$\frac{\partial F_1(t,\vec{r_1},\vec{p_1})}{\partial t} + \frac{\vec{p_1}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r_1}} - \frac{\partial U(\vec{r_1})}{\partial \vec{r_1}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p_1}} = \sum_{j=2}^{N} V \int \frac{\partial \Phi\left(\left|\vec{r_1} - \vec{r_j}\right|\right)}{\partial \vec{r_1}} \frac{\partial w_N}{\partial \vec{p_1}} d\vec{r_2} d\vec{p_2} \dots d\vec{r_N} d\vec{p_N}$$

Заменим j на 2 взаимно. Тогда получим:

$$(N-1)\frac{V}{V^2}\int d\vec{r_2} d\vec{p_2} \frac{\partial \Phi(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)}{\partial \vec{r_1}} \frac{\partial}{\partial \vec{p_1}} V^2 \int w_N d\vec{r_3} d\vec{p_3} \dots d\vec{r_N} d\vec{p_N}$$

$$V^2 \int w_N d\vec{r_3} d\vec{p_3} \dots d\vec{r_N} d\vec{p_N} = F_2(t,\vec{r_1},\vec{p_1};\vec{r_2},\vec{p_2})$$

Рассмотрим $(N-1)\frac{V}{V^2}$:

$$N \to \infty, V \to \infty;\ \frac{N}{V} = \frac{1}{v} = const$$

Тогда

$$\frac{\partial F_1(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1})}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{p_1}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \overrightarrow{r_1}} - \frac{\partial U(\overrightarrow{r_1})}{\partial \overrightarrow{r_1}}\frac{\partial F_1}{\partial \overrightarrow{p_1}} = \frac{1}{v}\int \frac{\partial \Phi(|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|)}{\partial \overrightarrow{r_1}}\frac{\partial F_2(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{p_2})}{\partial \overrightarrow{p_1}} d\overrightarrow{r_2}d\overrightarrow{p_2}$$

– первое уравнение цепочки Боголюбова

2. Как выразить F_2 через F_1?

$\frac{1}{V}F_1(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1})d\overrightarrow{r_1}d\overrightarrow{p_1}$ – это вероятность того, что частица с номером 1 в момент времени t находится в элементарном объеме $d\overrightarrow{r_1}d\overrightarrow{p_1}$, привязанном к точке $\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1}$.

Умножим эту конструкцию на N:

$N\frac{1}{V}F_1(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1})d\overrightarrow{r_1}d\overrightarrow{p_1}$ – это число частиц, попадающих в этот момент времени в этот объем.

Вероятность того, что две частицы в момент времени t оказываются в своих элементарных объемах:

$$\frac{1}{V^2}F_2(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{p_2})d\overrightarrow{r_1}d\overrightarrow{p_1}d\overrightarrow{r_2}d\overrightarrow{p_2}$$

Корреляция их поведения существенна на расстояниях порядка размеров самих молекул.

3. Пусть $\frac{\partial \Phi}{\partial \overrightarrow{r_1}} \equiv 0$, тогда:

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N}U(\overrightarrow{r_i})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{p_1}} = \frac{\overrightarrow{p_1}}{m} = \dot{\overrightarrow{r_1}} \\ \dot{\overrightarrow{p_1}} = -\frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{r_1}} \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \dot{\overrightarrow{r_1}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \overrightarrow{r_1}} + \dot{\overrightarrow{p_1}}\frac{\partial F_1}{\partial \overrightarrow{p_1}} = \frac{dF_1}{dt} \equiv 0$$

4. Запишем первое уравнение цепочки в следующем виде:

$$\frac{\partial F_1(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = J_{\text{столкн}}(t,\vec{r},\vec{p},\{\Phi\},\{F_1\})$$

§15. Кинетическое уравнение с релаксационным членом.

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = -\frac{F_1 - F_{10}}{\tau}}$$

$$\tau: \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$$

$$F_{10}: \frac{\partial F_{10}}{\partial t} = 0$$

Эволюция к равновесию определяется только взаимодействием. Значит, внешние поля на этот процесс принципиально не влияют. Т.е., ими можно пожертвовать.

Пусть $\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv 0; \frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} = 0.$

Эти ограничения означают, что мы говорим о системе локально, т.е. о маленьком объеме. Значит, эволюция будет идти не к равновесию в целом, а к локальному равновесию.

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{F_1 - F_{10}}{\tau} \\ F_1(t=0) = F_1(0) \end{cases}$$

$$F_1(t) = F_{10} + (F_1(0) - F_{10})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Значит, τ – это период релаксации к локальному равновесию. Мы получили F_{10}, как локальное равновесное распределение.

Лекция 9

§16. Кинетическое уравнение Власова.

1.

$$\frac{\partial F_1(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}}-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}}=\frac{1}{v}\int\frac{\partial \Phi\left(\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\right)}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial F_2\left(t,\vec{r},\vec{p},\overrightarrow{r'},\overrightarrow{p'}\right)}{\partial \overrightarrow{p'}}\,d\overrightarrow{r'}d\overrightarrow{p'}$$

2. Выберем потенциал $\Phi(R)=\pm\frac{e^2}{R}$ (дальнодействующий потенциал).

Выберем некую частицу с положительным зарядом (см. рис.18), находящуюся в среде себе подобных. Тогда эта частица проявляет себя через потенциал на большом расстоянии. Если говорить о кулоновском потенциале, то это расстояние бесконечно. Но с учетом теплового движения возникает некая экранировка (для классическом системы – дебаевская экранировка), благодаря тому, что около данной частицы много других частиц. Раз их много, то радиус действия экранированного потенциала достаточно велик, и в пределах сферы, ограниченной этим радиусом, находится много частиц.

Появление еще одной частицы или выход её из сферы на фоне взаимодействия с огромным числом частиц будет просто незаметно. Но если представить, что эта частица оказалась на месте исходной частицы с положительным зарядом, то её вклад вполне сопоставим с тем, что дают все остальные. Значит, если мы исключим эти события, то можно оценивать их вероятности, и мы получим «бесстолкновительную» плазму.

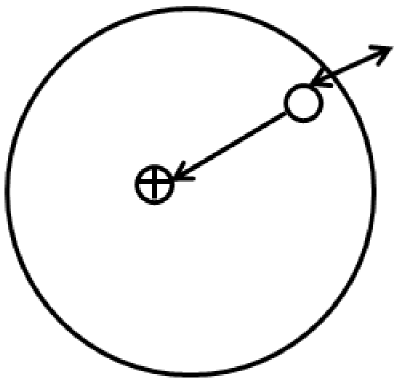

Рис.18 Сфера, ограниченная радиусом действия потенциала

Вывод: если эти две частицы (рис.18), за исключением случая столкновения, между собой не взаимодействуют, то двухчастичная корреляционная функция, которая описывает эти частицы, должна выглядеть так:

$$F_2(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{p_2})=F_1(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1})\cdot F_1(t,\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{p_2})+g(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{p_2})$$

Наша модель теперь состоим в том, что мы обнуляем добавку $g(t,\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{p_2})=0$.

Замечание

Мы будем рассматривать системы в целом электронейтральные. Значит, если у нас есть система частиц с положительным зарядом, то вместе с ней мы рассматриваем систему частиц с отрицательным зарядом, чтоб в сумме получить ноль. Но в уравнении фигурирует только одна функция распределения, т.е. только для какой-то одной подсистемы, а у нас две подсистемы. Значит, мы либо пишем два однотипных уравнения и обрабатываем их, либо для одной из подсистем вводим какое-то упрощение. Выберем второй путь.

Договоримся о следующем: F_1 описывает облако электронов в плазме, а вторую подсистему (положительно заряженную) будем рассматривать, как облако положительных ионов, но для этой второй подсистемы мы считаем задачу решенной.

3.

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}}-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}}=\frac{\partial F_1(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial \vec{p}}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\,\frac{N}{V}\int \Phi\left(\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|\right)F_1\left(t,\vec{r'},\vec{p'}\right)d\vec{r'}d\vec{p'}$$

$$\frac{N}{V}\int F_1\left(t,\vec{r'},\vec{p'}\right)d\vec{p'}=n\left(t,\vec{r'}\right)$$

$$\frac{N}{V}\int \Phi\left(\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|\right)F_1\left(t,\vec{r'},\vec{p'}\right)d\vec{r'}d\vec{p'}=\int \Phi\left(\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|\right)n\left(t,\vec{r'}\right)d\vec{r'}=\widetilde{U}(t,\vec{r})$$

Получаем **кинетическое уравнение Власова**:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial t}+\dfrac{\vec{p}}{m}\dfrac{\partial F_1}{\partial \vec{r}}-\dfrac{\partial\left(U+\widetilde{U}\right)}{\partial \vec{r}}\dfrac{\partial F_1}{\partial \vec{p}}=0\\ \widetilde{U}(t,\vec{r})=\dfrac{1}{v}\displaystyle\int \Phi\left(\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|\right)F_1\left(t,\vec{r'},\vec{p'}\right)d\vec{r'}d\vec{p'}\end{cases}$$

$\widetilde{U}$ – самосогласованное поле.

Заменим t на $-t$, тогда $\vec{p}\to-\vec{p}$. В результате, если решение существует в виде $F_1(t,\vec{r},\vec{p})$, то функция $F_1(-t,\vec{r},-\vec{p})$ – тоже решение. Значит, если первое из этих решений говорило о том, что с ростом t мы идем к равновесию, то второе говорит о том, что с ростом t мы уходим от равновесия.

§17. Линеаризованное уравнение Власова.

1. Пусть $F_1(t,\vec{r},\vec{p})=F_{10}(p)+f(t,\vec{r},\vec{p})$.

а) Положим

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\equiv 0$$

б)

$$\theta = const$$

в)

$$\left|\frac{f}{F_{10}}\right| \ll 1$$

Т.е., имеем дело со слабонеравновесной, пространственно-однородной, изотермической плазмой.

2.

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - e\vec{E}\frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = 0$$

Выясним, как выглядит напряженность поля $\vec{E}$. Запишем уравнение Максвелла:

$$div\vec{D} = 4\pi\rho$$

Будем считать, что все события происходят в вакууме. В этом вакууме находятся положительно заряженные частицы, которые равномерно распределены в пространстве, и отрицательно заряженные частицы (электроны). Т.к. действие происходит в вакууме, то $\vec{D}$ и $\vec{E}$ одно и то же. Тогда:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\rho = e(n_+ - n_-)$$

$$n_+ = \frac{N}{V}\int F_{10}(\vec{p})d\vec{p}$$

$$n_- = \frac{N}{V}\int (F_{10} + f)d\vec{p}$$

$$\rho = e\frac{N}{V}\left(-\int f(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}\right)$$

$$div\vec{E} = -4\pi en\int f(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

Если речь идет о нерелятивистских частицах,

$$F_{10}(\vec{p}) = w(\vec{p})$$

$$\int F_{10}(\vec{p})d\vec{p}\,d\vec{r} = \int\limits_{(V)} d\vec{r} = V$$

Тогда **линеаризованное уравнение Власова:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\vec{p}}{m}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}} - e\vec{E}\,\dfrac{\partial w(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = 0 \\ div\vec{E} = -4\pi en \displaystyle\int f(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p} \end{cases}$$

Если есть решение $f(t,\vec{r},\vec{p})$, то решение $f(-t,\vec{r},-\vec{p})$ тоже относится к этому уравнению.

$$-\frac{F_1 - F_{10}}{\tau} = -\varepsilon f$$

$$\varepsilon \to +0$$

Лекция 10

Вернемся к кинетическому уравнению Власова.

$$F(t,\vec{r},\vec{v}) \equiv \frac{m^3 N}{V} F_1(t,\vec{r},\vec{p}); \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\dfrac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} - \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial\left(U+\widetilde{U}\right)}{\partial \vec{r}}\dfrac{\partial F}{\partial \vec{v}} = 0 \\ \widetilde{U}(t,\vec{r}) = \int \Phi\left(\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\right) F_1\left(t,\overrightarrow{r'},\overrightarrow{v'}\right) d\overrightarrow{r'} d\overrightarrow{v'} \end{cases}$$

Это уравнение нелинейное и интегро-дифференциальное.

В кинетическом уравнении было предъявлено два требования: оно должно быть замкнуто относительно неизвестной функции F, уравнение должно описывать необратимый переход к равновесию независимо от начальных условий и самопроизвольно. Здесь этого нет. Для проверки выполним следующую операцию:

Обратим время $t \to -t$, сохраним координаты $\vec{r} \to \vec{r}$, вследствие этого обратим скорость $\vec{v} \to -\vec{v}$.

Тогда если $F(t,\vec{r},\vec{v})$ – решение, то $F(-t,\vec{r},-\vec{v})$ тоже решение.

Продолжим **§17. Линеаризованное уравнение Власова.**

1. Слабая неравновесность:

$$\frac{|F(t,\vec{r},\vec{v}) - F_0(\vec{v})|}{F_0} \ll 1$$

а) Положим, что внешних полей нет:

$$U(\vec{r}) \equiv const$$

Изотропная задача

б) $\theta = const$

Тогда $F_0 = n \cdot w(\vec{v}) = F_0(\vec{v})$.

$$F(t,\vec{r},\vec{v}) = F_0(\vec{v}) + \frac{N}{V} f(t,\vec{r},\vec{v})$$

Теперь первая строка в уравнении Власова:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = 0$$

Замечание

Мы берем в рассмотрение нейтральную в целом систему, состоящую из двух коллективов: положительно заряженные и отрицательно заряженные частицы, но заряд системы равен нулю (плазма). Если частиц два «сорта», то почему у нас одно уравнение?

В нашей системе из двух «сортов» частиц положительно заряженные частицы считаются равномерно распределенным фоном, значит, для них решать задачу не надо. И на этом фоне существует коллектив отрицательно заряженных частиц, для которых надо еще отыскать решение в виде одночастичной функции распределения.

$$-\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \vec{r}} = -e\vec{E}(t,\vec{r})$$

$$\frac{N}{V}\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\frac{N}{V} - \frac{e\vec{E}}{m}\left(\frac{N}{V}\frac{\partial w}{\partial \vec{v}} + \frac{N}{V}\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

Наша линеаризация состоит в том, что второе слагаемое в круглых скобках на фоне первого слагаемого мы считаем малым: $\frac{N}{V}\frac{\partial f}{\partial v} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\partial w}{\partial \vec{v}} = 0$$

Все действия происходят в вакууме, поэтому $\vec{E} = \vec{D}$.

$$div\vec{E} = 4\pi\rho = 4\pi e(n_+ - n_-) = 4\pi e\left(\frac{N}{V} - \int F\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'}\right)$$

$$\frac{N}{V} = \int F_0\left(\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'} = \int nw\left(\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'} = n = \frac{N}{V}$$

$$div\vec{E} = 4\pi e\int\left[F_0\left(\overrightarrow{v'}\right) - F\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)\right]d\overrightarrow{v'} = -4\pi en\int f\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'}$$

Тогда **линеаризованное уравнение Власова:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)}{\partial t} + \vec{v}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \dfrac{e\vec{E}(t,\vec{r})}{m}\dfrac{\partial w}{\partial \vec{v}} = 0 \\ div\vec{E} = -4\pi en\displaystyle\int f\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'} \end{cases}$$

Вспомним, как выглядит кинетическое уравнение с релаксационным членом.

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = -\frac{F - F_0}{\tau}$$

В нашем уравнении аналогом конструкции $-\frac{F-F_0}{\tau}$ будет:

$$-\varepsilon f_{\varepsilon\to+0};\, \varepsilon = \frac{1}{\tau}$$

Т.о., линеаризованное уравнение Власова с «модернизацией»:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)}{\partial t} + \vec{v}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \dfrac{e\vec{E}(t,\vec{r})}{m}\dfrac{\partial w}{\partial \vec{v}} = -\varepsilon f_{\varepsilon\to+0} \\ div\vec{E} = -4\pi en\displaystyle\int f\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'} \end{cases}$$

§18. Плазменные колебания. Их распространение и затухание.

1. Будем рассматривать пространственно-однородную, изотермическую и слабонеравновесную плазму.

$$U(\vec{r}) = const, \theta = const$$

$$\left|\frac{F - F_0}{F_0}\right| \ll 1$$

2. Предположим, что всё происходит на числовой оси без ограничений. Т.е. будем рассматривать одномерную задачу на всей числовой прямой, значит, граничные условия уходят на бесконечность.

Мы рассматриваем продольную волну электростатических колебаний вдоль оси x.

$$\begin{cases} f(t,x,\vec{v}) = f_{k\omega}(\vec{v})e^{-i\omega t+ikx} \\ E_x(t,x) = E_{k\omega}e^{-i\omega t+ikx} \end{cases}$$

Рис.19 Графическая интерпретация

Подставим эти значения в линеаризованное уравнение Власова. Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{eE_x}{m}\dfrac{\partial w}{\partial v_x} = -\varepsilon f_{\varepsilon\to+0} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = -4\pi en\displaystyle\int f\left(t,x,\overrightarrow{v'}\right)d\overrightarrow{v'} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega\cdot f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ik\cdot f$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = ik\cdot E_x$$

Тогда:

$$\begin{cases}(-i\omega + ikv_x)f_{k\omega}(\vec{v}) - \dfrac{eE_{k\omega}}{m}\dfrac{\partial w}{\partial v_x} = -\varepsilon f_{k\omega}{}_{\varepsilon\to+0} \\ ikE_{k\omega} = -4\pi en\displaystyle\int f_{k\omega}(\overrightarrow{v'})d\overrightarrow{v'}\end{cases}$$

Построим ответ для амплитуды $f_{k\omega}(\vec{v})$:

$$f_{k\omega}(\vec{v}) = \frac{-\dfrac{eE_{k\omega}}{m}\dfrac{\partial w}{\partial v_x}}{i\omega - ikv_x - \varepsilon} = \frac{1}{i}\frac{\dfrac{eE_{k\omega}}{m}\dfrac{\partial w}{\partial v_x}}{kv_x - \omega - i\varepsilon}{}_{\varepsilon\to+0}$$

$$ikE_{k\omega} = -4\pi en\frac{1}{i}\frac{e}{m}E_{k\omega}\int\frac{\dfrac{\partial w}{\partial v_x}}{kv_x - \omega - i\varepsilon}d\vec{v}$$

$E_{k\omega} \neq 0$

$$\frac{4\pi e^2 n}{m} = \omega_0^2, \omega_0 - \text{частота Лэнгмюра}$$

$$w(\vec{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z)$$

$$w(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^2 e_x^{-\frac{mv_x{}^2}{2\theta}}$$

Тогда

$$\frac{\partial w(v_x)}{\partial v_x} = w(v_x)\left(-\frac{mv_x}{\theta}\right)$$

Получаем:

$$k = \omega_0^2\left(-\frac{m}{\theta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_x w(v_x)dv_x}{kv_x - \omega - i\varepsilon}$$

Преобразуем это равенство:

$$1 + \frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{m}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_x w(v_x)dv_x}{v_x - \dfrac{\omega}{k} - i\varepsilon_1} = 0$$

Получили дисперсионное уравнение.

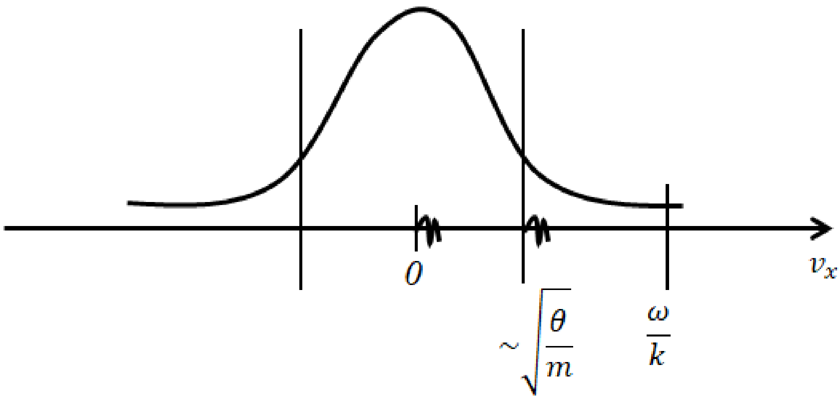

Рис.20 Изображение, помогающее выбрать положение полюса $\frac{\omega}{k}$

Из трех ситуаций на рис.20 выберем длинноволновое приближение.

Длинноволновое приближение:

$$\frac{\omega}{k} \gg \sqrt{\frac{\theta}{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\, \varepsilon \to +0;\ \varepsilon = \frac{1}{\tau_{\text{рел}}} \Rightarrow \omega \gg \varepsilon \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \gg \frac{1}{\tau_{\text{рел}}} \Rightarrow T \ll \tau_{\text{рел}}$$

Если $T \ll \tau_{\text{рел}}$, то мы рассматриваем интервал периода колебаний гораздо короче, чем длина свободного пробега, т.е. в этой плазме столкновения не рассматриваются.

Ранее мы говорили об эффективном радиусе действия потенциала (рис.18). Частица 2 может выйти и войти в эту область, но здесь много других частиц, поэтому частица 2 не влияет на частицу 1, тогда:

$$F_2 = F_1 \cdot F_1 + \cdots$$

Но мы в уравнении Власова учли, что одна частица влияет на другую. Это влияние было бы существенным, если бы эти частицы были расположены близко друг к другу. Пока мы грубо считаем, что одна частица не влияет на другую вовсе.

Запишем **формулу Сохоцкого:**

$$\frac{1}{\xi - a - i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{\xi - a}\right) + i\pi\delta(\xi - a)$$

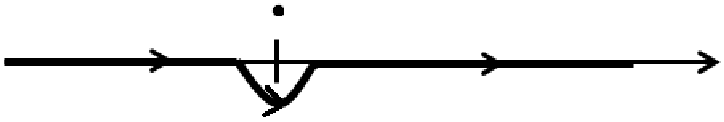

Рис.21 Графическая интерпретация формулы Сохоцкого

$$1+\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{m}{\theta}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_x w(v_x)}{v_x-\frac{\omega}{k}}dv_x+i\pi\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{m}{\theta}\cdot\frac{\omega}{k}w\left(\frac{\omega}{k}\right)=0$$

Обозначим $i\pi\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{m}{\theta}\cdot\frac{\omega}{k}w\left(\frac{\omega}{k}\right)\equiv i\Gamma(\omega,k)$.

$$\frac{kv_x}{\omega}\ll 1$$

Преобразуем интеграл в смысле главного значения:

$$P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_x w(v_x)}{v_x-\frac{\omega}{k}}dv_x=-\frac{k}{\omega}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_x w(v_x)}{1-\frac{kv_x}{\omega}}dv_x=$$

$$=-\frac{k}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\frac{kv_x}{\omega}+\left(\frac{kv_x}{\omega}\right)^2+\cdots\right]v_x w(v_x)dv_x \boxed{\equiv}$$

$$\overline{v_x^2}=\frac{\theta}{m}$$

$$\overline{v_x^4}=3\left(\frac{\theta}{m}\right)^2$$

$$\boxed{\equiv}-\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\theta}{m}\left[1+\frac{k^2}{\omega^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]$$

Тогда дисперсионное соотношение приводится к виду:

$$1-\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{m}{\theta}\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\theta}{m}\left[1+\frac{k^2}{\omega^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]+i\Gamma(\omega,k)=0$$

$$1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[1+\frac{k^2}{\omega^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]+i\Gamma(\omega,k)=0$$

Лекция 11

Продолжим дисперсионное соотношение из Лекции 10.

$$1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[1+\frac{k^2}{\omega^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]+i\Gamma(\omega,k)=0$$

$$\Gamma(\omega,k)=\frac{\pi m}{\theta}\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{\omega}{k}\left[\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{m\omega^2}{2\theta k^2}}\right]$$

$$\omega_0^2=\frac{4\pi e^2 n}{m}$$

Пусть $\omega=\Omega-i\gamma$, при этом $\left|\frac{\gamma}{\Omega}\right|\ll 1$.

$$\omega=\Omega\left(1-i\frac{\gamma}{\Omega}\right)$$

$$\frac{1}{\omega^2}\cong\frac{1}{\Omega^2}\left(1+2i\frac{\gamma}{\Omega}+\cdots\right)$$

Тогда исходное уравнение:

$$1-\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\left(1+2i\frac{\gamma}{\Omega}+\cdots\right)\left[1+\frac{k^2}{\Omega^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]+i\Gamma(\Omega,k)=0$$

$$Re\colon 1-\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\left[1+\frac{k^2}{\Omega^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]=0$$

$$\Omega^2\cong\omega_0^2\left[1+\frac{k^2}{\omega_0^2}\cdot 3\frac{\theta}{m}+\cdots\right]$$

$$\Omega\cong\omega_0\left[1+\frac{k^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{3}{2}\frac{\theta}{m}+\cdots\right]$$

$$\frac{k^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{3}{2}\frac{\theta}{m}\ll 1$$

$$Im\colon -\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\cdot 2i\frac{\gamma}{\Omega}+i\Gamma(\Omega,k)=0$$

$$\gamma=\frac{\Omega^3}{2\omega_0^2}\cdot\Gamma(\Omega,k)\approx\frac{\omega_0}{2}\Gamma(\omega_0,k)=\frac{\omega_0}{2}\cdot\pi\frac{m}{\theta}\left(\frac{\omega_0}{k}\right)^3\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{m\omega_0^2}{2\theta k^2}}$$

$$\Phi(R)=\frac{ke^2}{R}e^{-\frac{r}{r_D}}$$

r_D – радиус Дебая.

$$\frac{1}{r_D^2} = \frac{4\pi e^2 n}{\theta} \Rightarrow \frac{\theta}{m} \cdot \frac{k^2}{\omega_0^2} = k^2 r_D^2 \ll 1$$

Затухание Ландау:

$$\gamma = \omega_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{kr_D}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{kr_D}\right)^2}$$

Перед нами следующая конструкция, рассматриваемая в пределе:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0, x = \frac{1}{kr_D}$$

Т.о., $\frac{\gamma}{\Omega} \cong \frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1, \gamma > 0$ – слабое затухание.

Получили: во-первых, электростатическая волна, которую мы рассматриваем, действительно может распространяться и переносить сигнал, поскольку её групповая скорость не равна нулю из-за поправочного слагаемого в Ω; во-вторых, при этому мы получили малое затухание.

§19. Кинетическое уравнение Больцмана

1. $F(t, \vec{r}, \vec{v}) = m^3 \frac{N}{V} F_1(t, \vec{r}, \vec{p}); \vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = J_{\text{ст}}(t, \vec{r}, \vec{v}, \{F\}, \{\Phi\})$$

$J_{\text{ст}}$ – интеграл столкновений.

2. Будем рассматривать разреженный газ нейтральных молекул.

Короткодействующий потенциал (потенциал Леннарда-Джонса):

$$\Phi(R) = \frac{a}{R^{12}} - \frac{b}{R^6}$$

Разреженность:

$$\bar{r} \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg r_0$$

$$\frac{V}{N} = v; v^{1/3} \gg r_0$$

$$1 \gg \frac{r_0^3}{v}$$

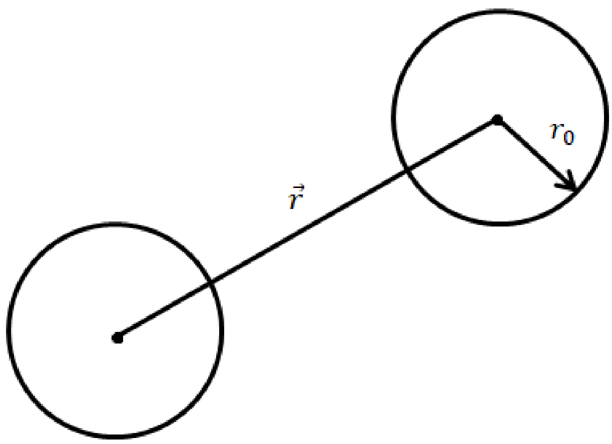

Рис.22 Изображение двух частиц, находящихся на среднем расстоянии $\vec{r}$ друг от друга

Впредь будем рассматривать только парные столкновения.

3. **Задача двух тел.**

Пусть до столкновения первая частица обладает скоростью $\vec{v}$, а вторая – $\overrightarrow{v_2}$. После столкновения: $\overrightarrow{v'}; \overrightarrow{v_1{}'}$.

Закон сохранения импульса:

$$m\vec{v} + m\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{v'} + m\overrightarrow{v_1{}'}$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v')^2}{2} + \frac{m(v_1')^2}{2}$$

$$\begin{cases} m\vec{v} + m\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{v'} + m\overrightarrow{v_1{}'} \\ \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{m(v')^2}{2} + \dfrac{m(v_1')^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_1{}'} \\ v^2 + v_1^2 = (v')^2 + (v_1')^2 \end{cases}$$

Из ЗСИ следует:

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} + A\vec{e}; \quad (\vec{e}, \vec{e}) = 1$$

$$\overrightarrow{v_1{}'} = \overrightarrow{v_1} - A\vec{e}$$

Тогда:

$$v^2 + v_1^2 = v^2 + 2A(\vec{v} \cdot \vec{e}) + A^2 + v_1^2 - 2A(\overrightarrow{v_1} \cdot \vec{e}) + A^2$$

$$0 = 2A\{(\vec{v} \cdot \vec{e}) - (\overrightarrow{v_1} \cdot \vec{e}) + A\}$$

$$A = (\overrightarrow{v_1} \cdot \vec{e}) - (\vec{v} \cdot \vec{e}) = (\vec{g} \cdot \vec{e})$$

$$\overrightarrow{v_1} - \vec{v} = \vec{g}$$

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} + (\vec{g}\cdot\vec{e})\vec{e}$$

$$\overrightarrow{v_1{}'} = \overrightarrow{v_1} - (\vec{g}\cdot\vec{e})\vec{e}$$

$$\overrightarrow{g'} = \overrightarrow{v_1{}'} - \overrightarrow{v'} = \vec{g} - 2(\vec{g}\cdot\vec{e})\vec{e}$$

$$g'^2 = g^2 - 4(\vec{g}\cdot\vec{e})(\vec{g}\cdot\vec{e}) + 4(\vec{g}\cdot\vec{e})^2(\vec{e}\cdot\vec{e})$$

Получаем

$$\boxed{g = inv}$$

Якобиан перехода от $\vec{v}$ и $\overrightarrow{v_1}$ к «штрихованным» скоростям

$$\left|\frac{\partial\left(\overrightarrow{v'},\overrightarrow{v_1{}'}\right)}{\partial(\vec{v},\overrightarrow{v_1})}\right| = 1 \Rightarrow d\vec{v}d\overrightarrow{v_1} = d\overrightarrow{v'}d\overrightarrow{v_1{}'}$$

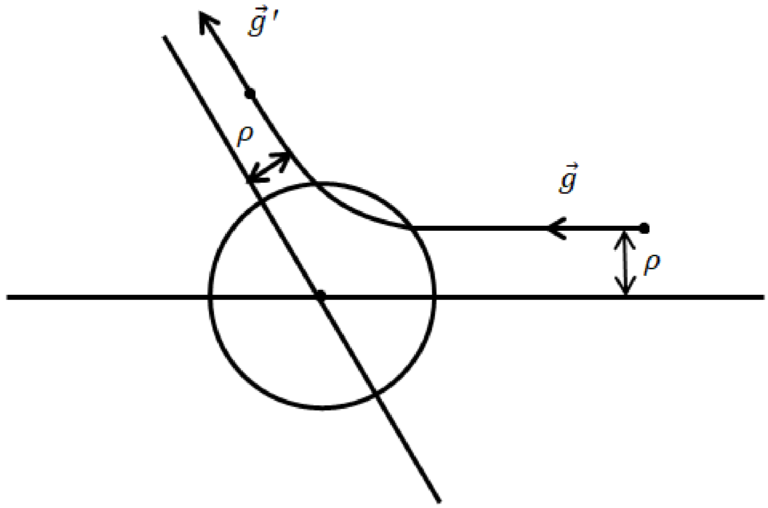

Рис.23 Прямые столкновения

В случае обратных столкновений время будет течь в ту же сторону, но прямые столкновения выбивают частицу из исходного состояния, т.е., таких частиц стало меньше (тех, у которых скорость $\vec{v}$).

Обратным столкновением будет то, которое пополняет число этих частиц, т.е. приводит частицы со скоростью $\vec{v}$.

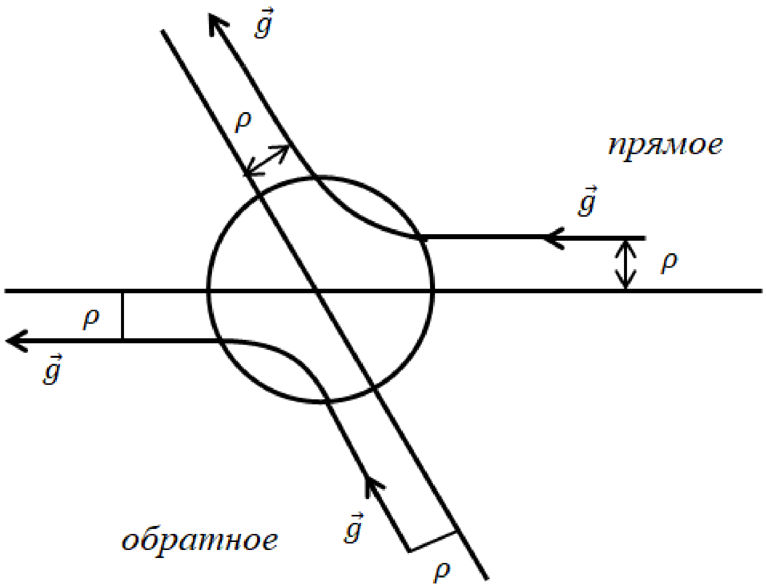

Рис.24 Прямое и обратное столкновение

Рассмотрим дифференциальное сечение рассеяние (см. рис.25) «на входе». В плоскости, перпендикулярной этой прямой, образуем площадку, площадь которой $\rho d\rho d\varphi$.

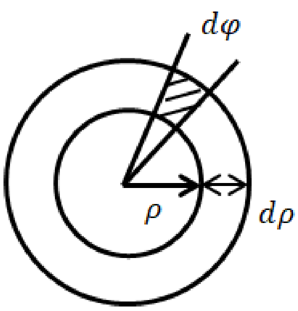

Рис.25 Дифференциальное сечение рассеяния

Угол рассеяния θ:

$$\theta = inv;\ \rho d\rho d\varphi = d\sigma = inv$$

4. Вывод уравнения Больцмана

Выпишем исходный вид кинетического уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = J_{\text{столкн}} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{столкн}}$$

Число частиц в элементарном объеме $d\vec{r}d\vec{v}$ можно построить с помощью F:

$$F(t,\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v}$$

Изменение этого числа за счет столкновений за время *dt*:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{ст}} dtd\vec{r}d\vec{v}$$

Прямые столкновения

1) Найдем число частиц, падающих на мишень за время *dt*. Выделим цилиндр (см. рис.26). За время *dt* частицы со скоростью g пройдут расстояние gdt. Значит, если этот цилиндр передвинуть так, чтобы он своим основанием касался сферы взаимодействия, то частицы с такими относительными скоростями за это время придут к сфере из этого цилиндра.

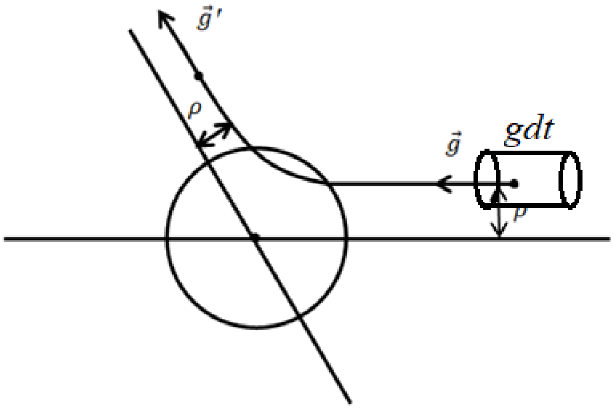

Рис.26 Прямое столкновение

Боковая сторона длиной gdt, площадь основания – дифференциальное сечение рассеяния. Тогда число частиц, падающих на мишень за время *dt*:

$$F(t,\vec{r},\overrightarrow{v_1}) = (gdt \cdot d\sigma)d\overrightarrow{v_1}$$

2) Число мишеней

$$F(t,\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v}$$

3) Число столкновений

Гипотеза Больцмана о числе столкновений: Stoßzahlansatz:

Число столкновений – это произведение числа мишеней на число падающих частиц.

$$F(t,\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v} \cdot F(t,\vec{r},\overrightarrow{v_1})(gdt \cdot d\sigma)d\overrightarrow{v_1}$$

Обратные столкновения

$$F\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)d\vec{r}d\overrightarrow{v'}\cdot F\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v_1{}'}\right)(g'dt\cdot d\sigma')d\overrightarrow{v_1{}'}$$

Изменение числа частиц за счет столкновений за время *dt*:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{ст}}dtd\vec{r}d\vec{v}=dtd\vec{r}d\vec{v}\int d\overrightarrow{v_1}gd\sigma(f'f_1'-ff_1)$$

$$f=F(t,\vec{r},\vec{v})$$

$$f_1=F(t,\vec{r},\overrightarrow{v_1})$$

$$f'=F\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v'}\right)$$

$$f_1{}'=F\left(t,\vec{r},\overrightarrow{v_1{}'}\right)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$F(t,\vec{r},\vec{v})\equiv f$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}-\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}=\int(f'f_1'-ff_1)gd\sigma\,d\overrightarrow{v_1}$$

– кинетическое уравнение Больцмана

Лекция 12

Выпишем кинетическое уравнение Больцмана (см. Лекция 11).

$$f = F(t, \vec{r}, \vec{v})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = J_{\text{ст}} = \int (f'f_1' - ff_1) g d\sigma\, d\overrightarrow{v_1}$$

Перед нами интегро-дифференциальное уравнение.

Все функции f записаны в один и тот же момент времени и в одной и той же точке. Хотя на рис.23 все эти функции относятся к чакстицам в разных местах. Значит, мы не замечаем этой разницы, и огрубление масштаба по расстояниям составляет размеры области взаимодействия. Т.е., нам все равно, где вблизи этой сферы, очерчивающей область взаимодействия, находятся частицы. Тогда любые изменения координат или изменение радиус-вектора они много больше, чем радиус действия потенциала:

$$\Delta r \gg r_0$$

$$\Delta t \gg \tau_{\text{вз}} \sim \frac{2r_0}{g}$$

В левой части интеграла столкновений появились два дрейфовых члена. Если посмотреть на один из них $\left(-\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right)$, $-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ – внешняя сила. Тогда мы оказывается перед задачей, в которой две частицы взаимодействуют друг с другом на фоне внешних сил (на фоне третьего тела). Значит, мы должны сказать в каком смысле и на каком масштабе времен и длин допустимо добавление дрейфовых членов. На длине свободного пробега внешнее поле должно быть несущественным. Это означает, что изменение потенциала внешнего поля заметно на расстояниях, которые много больше, чем длина свободного пробега. Т.е., возникает ограничение на расстояние:

$$\Delta r \gg \lambda_{\text{св.пробега}}$$

Заменив в кинетическом уравнении t на $-t$ и v на $-v$, т.е., обратив движение, в левой части получаем общий знак «–», а в правой – неизвестно.

§20. Н-теорема Больцмана.

1. **Лемма**

$$I \equiv \int \varphi(\vec{v}) J_{\text{ст}} d\vec{v} = \int \varphi(\vec{v})(f'f_1' - ff_1) g d\sigma d\overrightarrow{v_1} d\vec{v}$$

Сделаем следующие замены: $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v'} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1{}'}$. Тогда получим:

$$I = \int \varphi(\vec{v}_1)(f'f_1' - ff_1) g d\sigma d\vec{v} d\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{2}\int [\varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{v}_1)](f'f_1' - ff_1) g d\sigma d\overrightarrow{v_1} d\vec{v}$$

Пусть теперь $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{v'}; \overrightarrow{v_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1{}'}$.

$$I = \frac{1}{2}\int \left[\varphi\left(\overrightarrow{v'}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{v_1{}'}\right)\right](ff_1 - f'f_1') g' d\sigma' d\overrightarrow{v_1{}'} d\overrightarrow{v'}$$

$$g' d\sigma' d\overrightarrow{v_1{}'} d\overrightarrow{v'} = inv$$

$$I=\frac{1}{4}\int\left[\varphi(\vec{v})+\varphi(\vec{v}_1)-\varphi(\overrightarrow{v'})-\varphi\left(\overrightarrow{v_1{}'}\right)\right](f'f_1'-ff_1)gd\sigma d\overrightarrow{v_1}d\vec{v}$$

Лемма утверждает, что первоначальный интеграл I можно свести к этой симметризованной форме.

2. Введем функцию $H(t)$:

$$H(t)=\int F(t,\vec{r},\vec{v})lnF(t,\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v}$$

$d\vec{r}d\vec{v}$ – фазовый объем для одной частицы.

Наша система состоит из N частиц, значит, когда мы предположим перейти к суммированию, которое предшествовало интегрированию, то это будет сумма по состояниям одночастичного гамильтониана.

$$\frac{dH}{dt}=\int\frac{\partial F}{\partial t}lnFd\vec{r}d\vec{v}+\int F\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial t}d\vec{r}d\vec{v}$$

$$\int\frac{\partial F}{\partial t}d\vec{r}d\vec{v}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int Fd\vec{r}d\vec{v}\right)=\frac{\partial N}{\partial t}=0$$

Тогда:

$$\frac{dH}{dt}=\int(lnF)\cdot J_{\text{ст}}d\vec{r}d\vec{v}-\int\vec{v}\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}lnFd\vec{r}d\vec{v}+\frac{1}{m}\int\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}lnFd\vec{r}d\vec{v}$$

$$\int\vec{v}\int\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}lnFd\vec{r}\right)d\vec{v}$$

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{r}}\ln F\,d\vec{r}\right)=\int\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(F\ln F-F)d\vec{r}=0$$

$$\int\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}\ln F\,d\vec{r}d\vec{v}=\int\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\int\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}\ln F\,d\vec{v}\right)d\vec{r}$$

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial\vec{v}}\ln F\,d\vec{v}\right)=\int\frac{\partial}{\partial\vec{v}}(F\ln F-F)d\vec{v}=0$$

В результате:

$$\frac{dH}{dt}=\int(\ln F)(f'f_1'-ff_1)gd\sigma d\overrightarrow{v_1}d\vec{r}d\vec{v}=$$

$$=\frac{1}{4}\int(\ln f+\ln f_1-\ln f'-\ln f_1')(f'f_1'-ff_1)gd\sigma d\overrightarrow{v_1}d\vec{r}d\vec{v}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\ln\frac{ff_1}{f'f_1{}'}\right)(f'f_1'-ff_1)gd\sigma d\vec{v}d\overrightarrow{v_1}d\vec{r}$$

Пусть $(f'f_1'-ff_1)=a-b$. Тогда

$$\left(\ln\frac{ff_1}{f'f_1{}'}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right),a>0,b>0$$

$$\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)(a-b)\leq 0$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\int\left(\ln\frac{ff_1}{f'f_1{}'}\right)(f'f_1'-ff_1)gd\sigma d\vec{v}d\overrightarrow{v_1}d\vec{r}\leq 0$$

H-теорема Больцмана:

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

§21. Функция, обращающая в нуль интеграл столкновений Больцмана

1.

$$J_{\text{ст}} = \int (f'f_1' - ff_1) g d\sigma d\overrightarrow{v_1}$$

Достаточно:

$$f'f_1' = ff_1$$

Прологарифмируем

$$\ln f' + \ln f_1{}' = \ln f + \ln f_1$$
$$1' + 1_1' = 1 + 1_1$$

Из ЗСИ:

$$\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_1{}'} = \vec{v} + \overrightarrow{v_1}$$

Из ЗСМЭ:

$$v'^2 + v_1'^2 = v^2 + v_1^2$$

Т.о., интегралы движения аддитивного характера, которые сохраняются в задаче двух тел:

$$\begin{cases} 1' + 1_1' = 1 + 1_1 \\ \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_1{}'} = \vec{v} + \overrightarrow{v_1} \\ v'^2 + v_1'^2 = v^2 + v_1^2 \end{cases}$$

$$\ln f = \ln F(t, \vec{r}, \vec{v}) = \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{v} + \gamma v^2$$

$$f \equiv F(t, \vec{r}, \vec{v}) = e^{\alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{v} + \gamma v^2}$$

Вспомним локальное распределение Максвелла:

$$f \equiv F(t, \vec{r}, \vec{v}) = n(t, \vec{r}) w(t, \vec{r}, \vec{v}) = n(t, \vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi\theta(t, \vec{r})}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\vec{v} - \vec{u}(t, \vec{r}))^2}{2\theta(t, \vec{r})}}$$

Сопоставим этот результат и предыдущий. Объявим, что $\vec{v} = 0$. Тогда

$$e^{\alpha} = n(t, \vec{r}) \left(\frac{m}{2\pi\theta(t, \vec{r})}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\vec{u}(t, \vec{r}))^2}{2\theta(t, \vec{r})}}$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\vec{\beta} \cdot \vec{v}) = \frac{m}{\theta} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{m}{\theta} \vec{u}$$

$$\gamma v^2 = \frac{m}{2\theta} v^2; \gamma = -\frac{m}{2\theta}$$

Т.о., получили систему

$$\begin{cases} e^{\alpha} = n(t,\vec{r})\left(\dfrac{m}{2\pi\theta(t,\vec{r})}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\left(\vec{u}(t,\vec{r})\right)^2}{2\theta(t,\vec{r})}} \\ \vec{\beta} = \dfrac{m}{\theta}\vec{u} \\ \gamma = -\dfrac{m}{2\theta} \end{cases}$$

§22. Линеаризованное уравнение Больцмана. Оценка времени релаксации к локальному равновесию.

1. Запишем исходное уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int (f'f_1' - ff_1) g d\sigma d\overrightarrow{v_1}$$

2. Пусть

1) $\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv 0$

2) Переход к локальному рассмотрению внутри большой системы: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv 0$.

3) $f(t,\vec{v}) = f_0(\vec{v})[1 + h(t,\vec{v})]; |h| \ll 1$

3.

$$f_0\frac{\partial h}{\partial t} = \int \left(f_0'f_{01}'(1+h')(1+h_1') - f_0 f_{01}(1+h)(1+h_1)\right) g d\sigma d\overrightarrow{v_1}$$

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\theta}}$$

Приходим к следующему выводу:

$$f_0 f_{01} = f_0' f_{01}'$$

Получаем:

$$f_0\frac{\partial h}{\partial t} = \int f_0 f_{01}(1 + h' + h_1' - 1 - h - h_1 + \cdots) g d\sigma d\overrightarrow{v_1}$$

Окончательный ответ:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \int n \cdot w(\overrightarrow{v_1})(h' + h_1' - h - h_1) g d\sigma d\overrightarrow{v_1}$$

– линеаризованное уравнение Больцмана

4. Оценка времени релаксации к равновесию.

Наша цель:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{h}{\tau}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -h \cdot \int n w(\overrightarrow{v_1}) g d\sigma d\overrightarrow{v_1} = -\frac{h}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau} = n \int w(\overrightarrow{v_1}) g d\sigma d\overrightarrow{v_1}$$

Пусть $d\omega$ не зависит от скоростей. Тогда $\int d\omega = \sigma$ – полное сечение рассеяния.

$$\frac{1}{\tau} = n\sigma \int w(\overrightarrow{v_1}) |\overrightarrow{v_1} - \vec{v}| d\overrightarrow{v_1}$$

Умножим последнее равенство на $w(\vec{v})$ и проинтегрируем по $\vec{v}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{\tau}\right)} = \int w(\vec{v}) \frac{1}{\tau} d\vec{v} = n\sigma \int w(\overrightarrow{v_1}) w(\vec{v}) |\overrightarrow{v_1} - \vec{v}| d\overrightarrow{v_1} d\vec{v}$$

$$\int w(\overrightarrow{v_1}) w(\vec{v}) |\overrightarrow{v_1} - \vec{v}| d\overrightarrow{v_1} d\vec{v} = \overline{v_{\text{отн}}} = \sqrt{2} \cdot \bar{v} = \sqrt{\frac{8\theta}{\pi m}}$$

Получаем

$$\overline{\left(\frac{1}{\tau}\right)} = n\sigma\sqrt{2} \cdot \bar{v} = \frac{\bar{v}}{l_{\text{св.пробега}}}$$

$$\overline{\tau_{\text{лок}}} \sim \tau_{\text{св.пробега}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ